1 時間追跡，拘束条件

【メモ】

・問 1，2 はつりあい，問 3 は公式代入，問 4，問 5，問 6 は拘束条件を伴う単振動の解析（時刻は問わない），問 7 は単振動の時間追跡，問 8 は単振動と等加速度運動の時間追跡．なお，問 5，問 6 は公式処理でよい．

・単振動を行う物体の位置，および速度は以下の通り．

$$\begin{cases} x(t) = x_{\mathrm{c}} + C\sin(\omega t) + D\cos(\omega t)\,, \\ v(t) = \dfrac{dx}{dt}\,. \end{cases}$$

・解答は最短経路で解答に至るもので書いた．【補足】に詳細な解説を記した．

【解答】

斜面に沿った方向に x 軸，鉛直上向きに y 軸を定める．台車の斜面上の位置を x，動滑車の鉛直方向の位置を y，定滑車の位置を (x_1, y_1) とする．また，ばねの自然長を ℓ とし，$t=0$ で $x(0)=0$，$y(0)=\ell$ とする．

問 1　ばねの伸びを s，張力の大きさを S とする．台車，および滑車のつりあいより，

$$\begin{cases} m\cdot 0 = S - mg\sin 30^\circ\,, \\ 0\cdot 0 = 2S - ks \end{cases} \qquad \therefore S = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{1}{2}mg}\,, \quad s = \underset{\sim\sim}{\frac{mg}{k}}\,.$$

問 2　前問に示した．

問 3　公式より，

$$U = \frac{1}{2}ks^2 = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{(mg)^2}{2k}}\,.$$

問 4　拘束条件より，

$$x_1 - x + 2(y_1 - y) = \mathrm{const}$$
$$\therefore \mathit{\Delta} x + 2\mathit{\Delta} y = 0 \qquad \therefore \ddot{x} + \ddot{y} = 0$$

となる．ここで，$t=0$ で $x(0)=0$，$y(0)=\ell$ より，

$$x - 0 + 2(y-\ell) = 0 \qquad y - \ell = -\frac{1}{2}x$$

が成り立つ．

さて，動滑車が位置 y にあるときのばねの伸びは $s = y-\ell$ であり，拘束条件から $s = y-\ell = -\dfrac{1}{2}x$

と書ける．台車，および動滑車の運動方程式より，

$$\begin{cases} m\ddot{x} = S - mg\sin 30^\circ\,, \\ 0\cdot\ddot{y} = 2S - k(y-\ell) \end{cases} \qquad \therefore S = -\frac{1}{4}x\,, \quad \ddot{x} = -\frac{k}{4m}\left(x + \frac{2mg}{k}\right)$$

となり，台車の位置 x は角振動数 $\sqrt{\dfrac{k}{4m}}$，振動中心 $x = -\dfrac{2mg}{k}$ の単振動の微分方程式を満たす．$t=0$ で $x(0)=0$，$\dot{x}(0)=0$ より[*1]，

$$x = -\frac{2mg}{k} + \frac{2mg}{k}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{4m}}\,t\right)$$

と求まる．また，$y = -\dfrac{1}{2}x + \ell$ より，

$$y = \ell - \frac{mg}{k} + \frac{mg}{k}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{4m}}\,t\right)$$

と求まる．よって，台車の振幅は $\dfrac{2mg}{k}$，動滑車の振幅は $\dfrac{mg}{k}$ である．

問 5　単振動の速さの最大値は振幅と角振動数の積で与えられる．公式より，

$$\max\{\dot{x}\} = \frac{2mg}{k}\sqrt{\frac{k}{4m}} = g\sqrt{\frac{m}{k}}\,.$$

問 6　公式より，

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{4m}{k}}} = 4\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\,.$$

問 7　糸を切断したのは，2 回目に振動中心 $x = -\dfrac{2mg}{k}$ を通過した時刻であるから，その時刻 t は $t = \dfrac{3}{4}T$ と判断できる[*2]．また，この時刻での速度は運動の様子から $\dot{x} = g\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ とわかる[*3]．糸

[*1] 運動の様子から瞬時に関数形と係数を判断できるようにする（今回であれば $t=0$ で $x=0$ であること，初速度が 0 であることから cos 型であることから求まる）．あくまで基本は

$$\begin{cases} x = x_{\mathrm{c}} + C\sin(\omega t) + D\cos(\omega t)\,, \\ \dot{x} = C\omega\cos(\omega t) - D\omega\sin(\omega t) \end{cases}$$

に初期条件を代入して未知定数 C，D を決定する手順であり，この操作を忘れてはいけない．この計算は【補足２】に示した．

[*2] 以下のように方程式を解いてもよい．

$$-\frac{2mg}{k} + \frac{2mg}{k}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{4m}}\,t\right) = -\frac{2mg}{k} \qquad \therefore t = 3\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\ \left(=\frac{3}{4}T\right).$$

ここで，$\sqrt{\dfrac{k}{4m}}\,t = \dfrac{\pi}{2}$ は 1 回目の通過時刻ゆえ不適である．

[*3] 単振動をしている間の台車の速度 $\dot{x}$ の式（以下に示した）に $t = 3\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ を代入して求めてもよい．

$$\dot{x} = \frac{d}{dt}\left\{-\frac{2mg}{k} + \frac{2mg}{k}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{4m}}\,t\right)\right\} = -g\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{4m}}\,t\right)$$

を切断後，台車の加速度は $-\dfrac{1}{2}g$ であるから[*4]，時刻 t における台車の位置 x，および速度 $\dot{x}$ は，$t=\dfrac{3}{4}T$ で $x=-\dfrac{2mg}{k}$，$\dot{x}=g\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ に留意して，

$$\begin{cases} x=-\dfrac{2mg}{k}+g\sqrt{\dfrac{m}{k}}\left(t-\dfrac{3}{4}T\right)-\dfrac{g}{4}\left(t-\dfrac{3}{4}T\right)^2, \\ \dot{x}=g\sqrt{\dfrac{m}{k}}-\dfrac{g}{2}\left(t-\dfrac{3}{4}T\right) \end{cases}$$

と書ける．よって，$\dot{x}=0$ となる時刻は，

$$g\sqrt{\frac{m}{k}}-\frac{g}{2}\left(t-\frac{3}{4}T\right)=0 \qquad \therefore t=\frac{3}{4}T+2\sqrt{\frac{m}{k}}=\underline{(3\pi+2)\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

であり，このときのつりあいの位置 $x=-\dfrac{2mg}{k}$ からのずれは，

$$x-\left(-\frac{2mg}{k}\right)=g\sqrt{\frac{m}{k}}\cdot 2\sqrt{\frac{m}{k}}-\frac{g}{4}\left(2\sqrt{\frac{m}{k}}\right)^2=\underline{\frac{mg}{k}}.$$

問 8　台車と重力場からなる系の力学的エネルギーが最大となる瞬間に糸を切断すればよい．重力場の位置エネルギーの基準を $x=0$ の高さに取れば，糸切断前の力学的エネルギー保存則[*5]より，

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2+mgx\sin 30^\circ+\frac{1}{2}k(y-\ell)^2=\frac{1}{2}m\cdot 0^2+mg\cdot 0+\frac{1}{2}k\cdot 0^2$$
$$\therefore \frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}mgx=\underbrace{-\frac{1}{2}k(y-\ell)^2}_{\leq 0}$$

であるから，$y=\ell$ のとき，すなわち $x=-2(y-\ell)=0$ のときに糸を切断すれば台車と重力場からなる系の力学的エネルギーが最大値 0 を取り，最下点（重力場の位置エネルギーが最小値を取る点）における台車の運動エネルギーが最大となる．よって，位置を切断すればよい時刻は $t=\underline{T}$ と判断できる．また，最下点は $x=-\dfrac{2mg}{k}-L$ であるから，このときの速さ $v=|\dot{x}|$ は，力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}mg\left(-\frac{2mg}{k}-L\right)=0 \qquad \therefore v=\underline{g\sqrt{\frac{2m}{k}+\frac{L}{g}}}.$$

[*4] 糸切断後の運動方程式より：$m\ddot{x}=-mg\sin 30^\circ \qquad \therefore \ddot{x}=-\dfrac{1}{2}g$.

[*5] 導出は【補足 1】に示した．拘束条件から張力の仕事は相殺し，台車，重力場，ばね，動滑車からなる系の力学的エネルギーは保存する．ただし，動滑車の質量が 0 であることから動滑車の運動エネルギーは恒等的に 0 である．

【補足１】力学的エネルギー保存則の確認

ここでは，動滑車の質量を m_0 とする（そして最終的に $m_0 \to 0$ とする）．台車のエネルギー収支，およびばねのエネルギー収支の式はそれぞれ，

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\cdot 0^2 = \int_0^x \left(S - \frac{1}{2}mg\right)dx \quad \cdots\cdots ①$$
$$\frac{1}{2}m_0\dot{y}^2 - \frac{1}{2}m_0\cdot 0^2 = \int_\ell^y \left\{2S - k(y-\ell)\right\}dy \quad \cdots\cdots ②$$

と書ける．ここで，動滑車のエネルギー収支の式の右辺は拘束条件 $y - \ell = -\dfrac{1}{2}x$ より

$$\int_\ell^y \left\{2T - k(y-\ell)\right\}dy = \int_{x(y=\ell)}^{x(y=y)} \left(2T + \frac{1}{2}kx\right)\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{=-\frac{1}{2}}dx = \int_0^x \left(-T - \frac{1}{4}kx\right)dx$$

と書けるので，① + ② を計算すれば，

$$\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\cdot 0^2\right) + \left(\frac{1}{2}m_0\dot{y}^2 - \frac{1}{2}m_0\cdot 0^2\right) = \int_0^x \left(-\frac{1}{4}kx - \frac{1}{2}mg\right)dx$$
$$\therefore \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\cdot 0^2\right) + \left(\frac{1}{2}m_0\dot{y}^2 - \frac{1}{2}m_0\cdot 0^2\right) = -\frac{1}{2}k\underbrace{\left(-\frac{1}{2}kx\right)^2}_{=(y-\ell)^2} + \frac{1}{2}k\cdot 0^2 - mg\frac{x}{2} + mg\cdot 0$$
$$\therefore \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_0\dot{y}^2 + mg\frac{x}{2} + \frac{1}{2}k(y-\ell)^2 = \frac{1}{2}m\cdot 0^2 + \frac{1}{2}m_0\cdot 0^2 + mg\cdot 0 + \frac{1}{2}k\cdot 0^2$$

と力学的エネルギー保存則を確認することができる（問題を再現する際には $m_0 \to 0$ とせよ）．全体で見たときに張力が仕事をしないということが拘束条件に由来することも確認できたであろう．

【補足２】問４の時間追跡の補足

運動方程式から，台車の運動は角振動数 $\sqrt{\dfrac{k}{4m}}$，振動中心 $x = -\dfrac{2mg}{k}$ の単振動とわかる．よって，未知定数を C，D として，

$$\begin{cases} x = -\dfrac{2mg}{k} + C\sin\left(\sqrt{\dfrac{k}{4m}}\,t\right) + D\cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{4m}}\,t\right), \\ \dot{x} = C\sqrt{\dfrac{k}{4m}}\cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{4m}}\,t\right) - D\sqrt{\dfrac{k}{4m}}\sin\left(\sqrt{\dfrac{k}{4m}}\,t\right) \end{cases}$$

と書ける．初期条件 $x(0) = 0$，$\dot{x}(0) = 0$ より，

$$\begin{cases} 0 = -\dfrac{2mg}{k} + D, \\ 0 = C\sqrt{\dfrac{k}{4m}} \end{cases} \qquad \therefore C = 0, \quad D = \frac{2mg}{k}$$

と求まり，

$$\begin{cases} x = -\dfrac{2mg}{k} + \dfrac{2mg}{k}\cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{4m}}\,t\right), \\ \dot{x} = -g\sqrt{\dfrac{m}{k}}\sin\left(\sqrt{\dfrac{k}{4m}}\,t\right) \end{cases}$$

を得る．

【補足３】問４をエネルギーで考える

設問では，時刻 t を問われていないためエネルギーで考えるのが楽であるように思われる．しかし，続く設問まで見れば時間追跡的に考えるのが自然（楽である）と考え，上記の解答では時間追跡とした．

さて，力学的エネルギー保存則より，台車の位置 x は

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mg\frac{x}{2} + \frac{1}{2}k\left(-\frac{1}{2}x\right)^2 = 0$$
$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{8}\left(x + \frac{2mg}{k}\right)^2 - \frac{(mg)^2}{2k} = 0$$
$$\therefore x = -\frac{2mg}{k} \pm \frac{2mg}{k}\sqrt{1 - \frac{k}{m}g^2\dot{x}^2}$$

と書けるので，運動の範囲は $-\dfrac{4mg}{k} \leq x \leq 0$ とわかる．よって，台車の振動中心はその中心 $x = -\dfrac{2mg}{k}$ であり，振幅は $\dfrac{2mg}{k}$ とわかる．また，拘束条件 $\varDelta y = -\dfrac{1}{2}\varDelta x$ より，動滑車の振幅は $\dfrac{mg}{k}$ とわかる．

【補足４】問５を各種方法で泥臭く

時刻 t における台車の速度は，

$$\dot{x} = -g\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{4m}}\,t\right)$$

と書けるので，その振幅から最大値は $g\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ とわかる．

また，【補足３】に示した力学的エネルギー保存則の計算より，

$$\dot{x}^2 = \frac{m}{k}g^2 - \frac{k}{4m}\left(x + \frac{2mg}{k}\right)^2 \qquad \therefore \max\{\dot{x}\} = g\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

なお，個々のエネルギー収支の式では張力の仕事が出てきてしまう（が計算は可能である）．動滑車の

運動方程式から張力の大きさは $S=-\dfrac{1}{4}x$ と書けるから，台車のエネルギー収支の式は，

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2-\frac{1}{2}m\cdot 0^2=\int_0^x\left(-\frac{1}{4}kx-\frac{1}{2}mg\right)dx=-\frac{1}{8}kx^2-\frac{1}{2}mgx$$
$$\therefore\ \frac{1}{2}m\dot{x}^2=-\frac{1}{8}\left(x+\frac{2mg}{k}\right)^2+\frac{(mg)^2}{2k}$$

となり，$x=\dfrac{mg}{2k}$ のときに最大値 $g\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ を取ることがわかる．

【補足５】問８を時間追跡で

上の解答に示した通りに，糸を切断すればよい時刻は $t=T$ と判断できたとする．この時刻での速度は運動の様子から $\dot{x}=0$ とわかる[*6]．糸を切断後，台車の加速度は $-\dfrac{1}{2}g$ であるから[*7]，時刻 t における台車の位置 x，および速度 $\dot{x}$ は，$t=T$ で $x=0$，$\dot{x}=0$ に留意して，

$$\begin{cases} x=0+0\cdot(t-T)-\dfrac{g}{4}(t-T)^2\ , \\ \dot{x}=0-\dfrac{g}{2}(t-T) \end{cases}$$

と書ける．$x=-\dfrac{2mg}{k}-L$ を解いて，

$$\begin{cases} -\dfrac{2mg}{k}-L=-\dfrac{g}{4}(t-T)^2\ , \\ \dot{x}=-\dfrac{g}{2}(t-T) \end{cases}\qquad \therefore\ t=T+2\sqrt{\frac{2m}{k}+\frac{L}{g}}\,,\quad |\dot{x}|=g\sqrt{\frac{2m}{k}+\frac{L}{g}}\,.$$

【補足６】問８を読んだままに

解答や【補足５】では，どのような瞬間に糸を切断すれば最下点での速さが最大となるかという問いを，どんな瞬間に糸を切断すれば台車と重力場からなる系の力学的エネルギーが最大となるか，という問いを読み換えた．ここでは，問題文を文章そのまま理解し，時刻 $t=\tau$ に切断したとし，最下点での速さ $v=|\dot{x}|$ を切断時刻 τ の関数で表し，v が最大となるような τ と，そのときの速さ v を求める方針で考える．

このときの位置 x，および速度 $\dot{x}$ をそれぞれ x_0，v_0 とすると，

$$\begin{cases} x_0=-\dfrac{2mg}{k}+\dfrac{2mg}{k}\cos(\omega\tau)\,, \\ v_0=-g\sqrt{\dfrac{m}{k}}\sin(\omega\tau) \end{cases}$$

[*6] 単振動をしている間の台車の速度 $\dot{x}=-g\sqrt{\dfrac{m}{k}}\sin\left(\sqrt{\dfrac{k}{4m}}\,t\right)$ に $t=4\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}\ (=T)$ を代入して求めてもよい．

[*7] 糸切断後の運動方程式より：$m\ddot{x}=-mg\sin 30^\circ \qquad \therefore\ \ddot{x}=-\dfrac{1}{2}g\,.$

である．よって，切断後の $t > \tau$ での位置 x，および速度 $\dot{x}$ はそれぞれ，

$$\begin{cases} x = x_0 + v_0 (t-\tau) - \dfrac{g}{4}(t-\tau)^2 , \\ \dot{x} = v_0 - \dfrac{g}{2}(t-\tau) \end{cases}$$

と書ける．$x = -\dfrac{2mg}{k} - L$ を満たす時刻は，

$$\begin{aligned} x_0 + v_0(t-\tau) - \frac{g}{4}(t-\tau)^2 &= -\frac{2mg}{k} - L \\ -\frac{g}{4}\left\{(t-\tau) - \frac{2v_0}{g}\right\}^2 &= -x_0 - \frac{2mg}{k} - L - \frac{{v_0}^2}{g} \\ \therefore t-\tau &= -2\sqrt{\frac{m}{k}}\sin(\omega\tau) \pm \sqrt{\frac{4m}{k}\sin^2(\omega\tau) + \frac{2m}{k}\cos(\omega\tau) + \frac{4L}{g}} \\ &= -2\sqrt{\frac{m}{k}}\sin(\omega\tau) \pm 2\sqrt{\frac{2m}{k} + \frac{L}{g} - \frac{m}{k}\{\cos(\omega\tau)-1\}^2} \end{aligned}$$

と求まる．よって，この時刻（最下点の瞬間）における台車の速さ v は

$$\begin{aligned} v = |\dot{x}| &= \left|v_0 - \frac{g}{2}(t-\tau)\right| \\ &= g\sqrt{\frac{2m}{k} + \frac{L}{g} - \frac{m}{k}\{\cos(\omega\tau)-1\}^2} \end{aligned}$$

と求まり，$\cos(\omega\tau) = 1$ のときに速さ v が最大値を取ることがわかる．よって，v が最大となる糸の切断時刻 τ は，

$$\cos(\omega\tau) = 1 \qquad \therefore \tau = \frac{2\pi}{\omega} = 4\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

であり，このとき，

$$v = g\sqrt{\frac{2m}{k} + \frac{L}{g}} .$$

2 非等速運動，衝突，多体系

【メモ】

・問 1，問 2，問 3，問 5 は非等速円運動，問 4，問 10 は衝突，問 6，問 8 は多体系に従えばよい．問 9 は等速度運動の時間追跡である．

・非等速円運動の定石は以下の通り．

$$\begin{cases}\text{運動方程式（中心成分）}\\ \text{力学的エネルギー保存則}\end{cases}$$

・衝突の定石は以下の通り．

$$\begin{cases}\text{衝突の直前・直後の運動量保存則}\\ \text{問題で指示された条件}\end{cases}$$

固定面との衝突など，外力制御された物体のと衝突では運動量は保存しない．

・多体系の定石は以下の通り．

$$\begin{cases}\text{外力のない方向の運動量保存則}\\ \text{全体での力学的エネルギー保存則}\end{cases}$$

・力積は，問題文で力積と出てきたら考えればよい．計算手順は以下の通り．

$$\begin{cases} f\text{ が既知} \quad \to \quad \begin{cases} f\text{ が一定} \quad \to \quad f\varDelta t \\ f\text{ が未知} \quad \to \quad \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} f\,dt = \left(\begin{array}{c} f - t\text{ 図} \\ \text{の面積}\end{array}\right)\end{cases} \\ f\text{ が未知} \quad \to \quad \text{運動量収支から逆算} \begin{cases}\text{ベクトルを代数的に処理}\\ \text{ベクトルを幾何的に処理}\end{cases}\end{cases}$$

【解答】

問 1　力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}mv^2 = mga \qquad a = \underset{\sim\sim}{\frac{{v_0}^2}{2g}}\,.$$

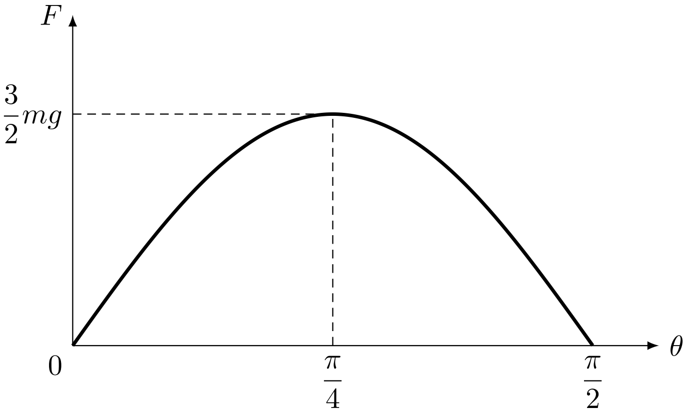
問 2　運動方程式（中心成分），および力学的エネルギー保存則より，

$$\begin{cases} m\dfrac{v^2}{a} = N - mg\cos\theta\,, \\ \dfrac{1}{2}mv^2 + mg(-a\cos\theta) = \dfrac{1}{2}m{v_0}^2 + mg(-a)\end{cases} \qquad \therefore v = \underset{\sim\sim\sim}{v_0\sqrt{\cos\theta}}\,, \quad N = \underset{\sim\sim\sim}{3mg\cos\theta}\,.$$

問 3　台の運動方程式より，，

$$M \cdot 0 = -F + N\sin\theta \qquad \therefore F = N\sin\theta = \frac{3}{2}mg\sin 2\theta\,.$$

よって，$0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲の下で，F のグラフは以下のようになる．



問 4　外力制御された固定面との衝突ゆえ，運動量は保存しない．問題の条件（はね返り係数の式）より，

$$v - 0 = -e(-v_0 - 0) \qquad \therefore v = ev_0\,.$$

よって，エネルギーの減少量は，

$$\Delta E = -\Delta K = -\left\{\frac{1}{2}m(ev_0)^2 - \frac{1}{2}m{v_0}^2\right\} = \underline{\frac{1-e^2}{2}m{v_0}^2}\,.$$

問 5　力学的エネルギー保存則より，

$$mgh = \frac{1}{2}m(ev_0)^2 \qquad h = \underline{\frac{e^2{v_0}^2}{2g}}\,.$$

問 6　折り返しゆえ，小球と台の速度は等しい（小球の速度の鉛直成分は 0 である）．速度の x 成分を v とすれば，運動量保存則，および力学的エネルギー保存則より，

$$\begin{cases} mv + Mv = mv_0\,, \\ \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Mv^2 + MgH = \frac{1}{2}m{v_0}^2 \end{cases} \qquad \therefore v = \underline{\frac{m}{M+m}v_0}\,, \quad H = \underline{\frac{M}{M+m}\frac{{v_0}^2}{2g}}\,.$$

問 7　f 不明ゆえ運動量収支より，

$$|I_x| = |\Delta p_x| = \left|\frac{m^2}{M+m}v_0 - mv_0\right| = \underline{\frac{Mm}{M+m}v_0}\,.$$

問 8　運動量保存則，および力学的エネルギー保存則より，

$$\begin{cases} mv_1 + MV_1 = mv_0\,, \\ \frac{1}{2}m{v_1}^2 + \frac{1}{2}M{V_1}^2 = \frac{1}{2}m{v_0}^2\,, \end{cases} \qquad \therefore v_1 = \underline{\frac{m-M}{M+m}v_0}\,, \quad V_1 = \underline{\frac{2m}{M+m}v_0}\,.$$

問 9　B を通過した時刻を $t = 0$ とし，この瞬間の小球の位置 x，台の位置 X をともに $x = X = 0$ と取る．すると，衝突以前の各物体の位置は時刻 t の関数として

$$\begin{cases} x = v_1 t\,, \\ X = V_1 t \end{cases}$$

と書け，$X - x = L$ となるとき衝突する．よって，

$$V_1 T - v_1 T = L \qquad \therefore T = \frac{L}{V_1 - v_1} = \underset{\sim\sim}{\frac{L}{v_0}}\,.$$

問 10　衝突の直前・直後の運動量保存則，および問題の条件（はね返り係数）より，

$$\begin{cases} mv_x + MV_x = mv_0\,, \\ v_x - V_x = -e(v_1 - V_1) = ev_0 \end{cases} \qquad \therefore v_x = \frac{m + eM}{M + m} v_0\,, \quad V_x = \frac{(1-e)m}{M+m} v_0\,.$$

よって，小球の運動エネルギー変化は，

$$\begin{aligned} \mathit{\Delta} K &= \frac{1}{2} m \left(\frac{m + eM}{M + m} v_0 \right)^2 - \frac{1}{2} m \left(\frac{m - M}{M + m} v_0 \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{m}{(M+m)^2} {v_0}^2 \left\{ (m + eM)^2 - (M - m)^2 \right\} \\ &= \frac{1+e}{2} \frac{Mm}{(M+m)^2} {v_0}^2 \left\{ 2m - (1-e)M \right\} \end{aligned}$$

となる．以上から，$\mathit{\Delta} K > 0$ となるような m の条件は，

$$2m - (1-e)M > 0 \qquad \therefore m > \underset{\sim\sim\sim\sim}{\frac{1-e}{2} M}\,(= m_1)\,.$$

3 $vB\ell$ の電磁誘導，金属電子論

【メモ】

・問 1，問 2，問 8，問 9 が電磁誘導に関する設問，問 3〜問 7 が金属電子論の設問．

・金属電子論は，$I=\dfrac{dQ}{dt}$ の日本語的理解を押さえた上で，誘導に乗れるようにしておけばよい．

・問 1，問 2 は誘導起電力の決定（①），問 8 は回路の状態決定と運動の解析（②，③），問 9 はエネルギーの変換（④）となっている．

・電磁誘導は電磁誘導の基本構成は，①誘導起電力の決定，②回路の議論，③運動の議論，④エネルギーの変換，という作りとなっている．これを知っているだけで見通しがよくなるので押さえておきたい．

・回路の一部が静磁場中を動く電磁誘導は，誘導起電力の決定では $vB\ell$ の公式が基本となる．・ジュール熱 J の計算は以下のように行う．

$$J=\begin{cases} RI^2\times(\text{経過時間}) & (I\ \text{一定のとき}), \\ \text{エネルギー収支から逆算} & (I\ \text{一定でないとき}). \end{cases}$$

【解答】

問 1　公式より，

$$V=\underline{vB\ell\cos\theta}\,.$$

問 2　平行一様電場の公式より，

$$vB\ell\cos\theta=E\ell \qquad \therefore E=\underline{vB\cos\theta}\,.$$

問 3　電子は速度に比例した抵抗力とクーロン力を受ける．よって，運動方程式は，

$$ma=-kc-eE \qquad \therefore \underline{ma=-kc-evB\cos\theta}\,.$$

問 4　十分時間経過後速度が一定になったことから加速度は 0 である．よって，

$$m\cdot 0=-kc_1-evB\cos\theta \qquad \therefore c_1=\underline{-\frac{evB}{k}\cos\theta}\,.$$

問 5　電流の定義より，

$$I=\frac{\varDelta Q}{\varDelta t}=\frac{(-e)nc_1\varDelta t}{\varDelta t}=\underline{-enc_1}\,.$$

問 6　問 4，問 5 より，

$$I=-en\left(-\frac{evB}{k}\cos\theta\right)=vB\ell\cos\theta\cdot\frac{e^2n}{k\ell} \qquad \therefore R=\frac{k\ell}{\underline{e^2n}}\,.$$

問 7　抵抗力の仕事率[*8]は定義より，

$$W = \vec{f} \cdot \Delta\vec{x} = \begin{pmatrix} -kc \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim}{-\frac{(evB\cos\theta)^2}{k}}\,.$$

また，消費電力は公式より，

$$J = RI^2 = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{(evB\cos\theta)^2}{k} n\ell}\,.$$

問 8　キルヒホッフの法則，および運動方程式（十分時間経過後速度一定より加速度 0）より，

$$\begin{cases} v_1 B\ell\cos\theta - RI = 0\,, \\ M \cdot 0 = Mg\sin\theta - IB\ell\cos\theta \end{cases} \qquad \therefore v_1 = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{Mgk\ell\sin\theta}{n(eB\ell\cos\theta)^2}}\,.$$

問 9　速度一定より運動エネルギー変化は 0 である．よって，単位時間当たりの力学的エネルギー変化は位置エネルギーの変化だけ考えればよく，

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{Mg(-\Delta x\sin\theta)}{\Delta t} = Mg(-v_1\sin\theta) = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim}{-\frac{n\ell(ev_1 B\cos\theta)^2}{k}}\,.$$

[*8] 問題文で仕事率を W で置くように指示されているが，通常，仕事（Work）を W，仕事率（Power）を P で記すので注意せよ．

$\boxed{4}$ $\boldsymbol{vB\ell}$ の電磁誘導，金属電子論

【メモ】

・$\boxed{3}$ の問 7 まで共通．

・単振動を行う物体の位置，および速度は以下の通り．

$$\begin{cases} x(t) = x_{\mathrm{c}} + C\sin(\omega t) + D\cos(\omega t)\,, \\ v(t) = \dfrac{dx}{dt}\,. \end{cases}$$

【解答】

問 8　キルヒホッフの法則は，

$$vB\ell\cos\theta - L\frac{dI}{dt} = 0\,.$$

ここで，$\dfrac{d}{dt} = \dfrac{\Delta}{\Delta t}$ と記せば，

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}B\ell\cos\theta - L\frac{\Delta I}{\Delta t} = 0 \qquad \therefore \Delta I = \underline{\frac{B\ell\cos\theta}{L}}\Delta x\,.$$

問 9　$I = \dfrac{B\ell\cos\theta}{L}x$ より[*9]，運動方程式は，

$$MA = Mg\sin\theta - IB\ell\cos\theta \qquad \therefore \underline{MA = Mg\sin\theta - \frac{(B\ell\cos\theta)^2}{L}x}\,.$$

問 10　運動方程式より，加速度 A は，

$$A = -\frac{(B\ell\cos\theta)^2}{ML}\left\{x - \frac{MgL\sin\theta}{(B\ell\cos\theta)^2}\right\}$$

と書けるので，導体棒は角振動数 $\omega = \dfrac{B\ell\cos\theta}{\sqrt{ML}}$，振動中心 $x_{\mathrm{c}} = \dfrac{MgL\sin\theta}{(B\ell\cos\theta)^2}$ の単振動を行う．$t=0$ で $x=0$，$v=0$ より，導体棒の位置 x は[*10]，

$$x = \frac{MgL\sin\theta}{(B\ell\cos\theta)^2} - \frac{MgL\sin\theta}{(B\ell\cos\theta)^2}\cos\left(\frac{B\ell\cos\theta}{\sqrt{ML}}t\right).$$

[*9] キルヒホッフの法則を時刻 t で積分すれば，

$$I - I(0) = \int_0^t \frac{B\ell\cos\theta}{L}\frac{dx}{dt}\,dt = \int_{x(0)}^{x(t)}\frac{B\ell\cos\theta}{L}\,dx = \frac{B\ell\cos\theta}{L}\{x - x(0)\}$$

$$\therefore I = \frac{B\ell\cos\theta}{L}x$$

を得る．ここで，$t=0$ で $I=0$，$x=0$ であることを用いた．

[*10] 右式において $x(0)=0$，$v(0)=0$ より C，D を求める：$\begin{cases} x(t) = x_{\mathrm{c}} + C\sin(\omega t) + D\cos(\omega t)\,, \\ v(t) = C\omega\cos(\omega t) - D\omega\sin(\omega t)\,. \end{cases}$

以上から，

$$\alpha = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{MgL\sin\theta}{(B\ell\cos\theta)^2}}\,, \quad \beta = \underset{\sim\sim\sim}{-\frac{MgL\sin\theta}{(B\ell\cos\theta)^2}}\,, \quad \omega = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{B\ell\cos\theta}{\sqrt{ML}}}\,.$$

問 11　導体棒，重力場，コイルからなる系全体が蓄えるエネルギー E は $I = d\frac{B\ell\cos\theta}{L}x$ より，

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}MV^2 + Mg\left(-x\sin\theta\right) + \frac{1}{2}LI^2 \\ &= \frac{1}{2}M\left\{-\beta\omega\sin\left(\omega t\right)\right\}^2 - Mg\sin\theta\cdot\alpha\left\{1-\cos\left(\omega t\right)\right\} \\ &\quad + \frac{1}{2}L\left(\frac{B\ell\cos\theta}{L}\right)^2\alpha^2\left\{1-\cos\left(\omega t\right)\right\}^2 \\ &= \frac{L}{2}\left(\frac{Mg}{B\ell}\tan\theta\right)^2\sin^2\left(\omega t\right) - L\left(\frac{Mg}{B\ell}\tan\theta\right)^2\left\{1-\cos\left(\omega t\right)\right\} \\ &\quad + \frac{L}{2}\left(\frac{Mg}{B\ell}\tan\theta\right)^2\left\{1+\cos^2\left(\omega t\right) - 2\cos\left(\omega t\right)\right\} \\ &= \underset{\sim}{0}\,. \end{aligned}$$

5 熱あり過程

【メモ】

・全て熱あり過程に関する設問.

・熱力学の基本的（むらがなく熱あり）な過程の定石は以下の通り.

$$\begin{cases} \text{状態決定：} \begin{cases} \text{可動部分のつりあい} & \to \quad \text{圧力 } P \text{ の決定} \\ \text{状態方程式} & \to \quad \text{温度 } T \text{ の決定（モル数 } n \text{ の場合も）} \end{cases} \\ \text{第 1 法則：熱の決定式} \end{cases}$$

熱力学第 1 法則は熱の決定式で，内部エネルギー変化は公式，気体のする仕事は $P-V$ 図の面積評価によって行う.

【解答】

問 1　ピストンのつりあい，および状態方程式（A 室）より，

$$\begin{cases} 0 = pS - kd - p_{\mathrm{B1}}S\,, \\ pS(\ell+d) = nRT_{\mathrm{I}} \end{cases} \qquad \therefore p_{\mathrm{B1}} = p - \underset{\sim\sim\sim}{\frac{kd}{S}}\,, \quad T_{\mathrm{I}} = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{pS(\ell+d)}{nR}}\,.$$

問 2　前問に示した.

問 3　ピストンのつりあい，および状態方程式（A 室）より，

$$\begin{cases} 0 = 2pS - kd - p_{\mathrm{B2}}S\,, \\ 2pS(\ell+d) = nRT_{\mathrm{II}} \end{cases} \qquad \therefore p_{\mathrm{B2}} = 2p - \frac{kd}{S}\,, \quad T_{\mathrm{II}} = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{2pS(\ell+d)}{nR}}\,.$$

問 4　体積一定より，

$$W_{\mathrm{I}\to\mathrm{II}} = \underset{\sim}{0}\,.$$

問 5　公式より，

$$\mathit{\Delta} U_{\mathrm{I}\to\mathrm{II}} = \frac{3}{2}nR(T_{\mathrm{II}} - T_{\mathrm{I}}) = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{3}{2}pS(\ell+d)}\,.$$

問 6　A 室内の気体の圧力は $2p$ で一定である．よって，$p-V$ 図の面積より，

$$W_{\mathrm{II}\to\mathrm{III}} = 2p(2Sd - Sd) = \underset{\sim\sim\sim}{2pSd}\,.$$

問 7　公式より，

$$\mathit{\Delta} U_{\text{ばね}} = \frac{1}{2}k(2d)^2 - \frac{1}{2}kd^2 = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{3}{2}kd^2}\,.$$

問 8　A 室内の気体に対する熱力学第一法則より，

$$Q_{\mathrm{II}\to\mathrm{III}} = W_{\mathrm{II}\to\mathrm{III}} + \mathit{\Delta} U_{\mathrm{II}\to\mathrm{III}} = \underset{\sim\sim\sim}{5pSd}\,.$$

問 9　状態 Ⅲ における B 室内の気体の圧力 $p_{\mathrm{B}}=p_{\mathrm{B3}}$ は，ピストンのつりあいより，

$$p_{\mathrm{B3}}=2p-\frac{2kd}{S}\,.$$

この $p_{\mathrm{B}}=p_3$ の下で，ばねの伸びが x のときの A 室内の圧力を $p_{\mathrm{A}}(x)$，温度を $T(x)$ とする．ピストンのつりあい，および状態方程式（A 室）より，

$$\begin{cases} 0=p_{\mathrm{A}}(x)S-kx-(2pS-2kd)\,, \\ p_{\mathrm{A}}(x)S(\ell+x)=nRT(x) \end{cases}$$

$$\therefore p_{\mathrm{A}}(x)=2p+\frac{k}{S}(x-2d)\,,\quad T(x)=\frac{(\ell+x)\{k(x-2d)+2pS\}}{nR}\,.$$

よって，$x=d$ では，

$$p_{\mathrm{A}}(d)=2p-\frac{kd}{S}\,.$$

問 10　$x=0$ を代入して，

$$T(0)=\frac{2(pS-kd)}{nR}\,.$$

6 A 幾何光学

【メモ】

・問 1 は公式，問 2，3 は干渉条件の導出，問 4，5 は干渉条件を用いた典型的な考察問題． ・干渉条件は以下の通り（m を整数）．

$$(\text{位相差}) = \begin{cases} 2m\pi & (\text{強めあい}), \\ (2m-1)\pi & (\text{弱めあい}) \end{cases}$$

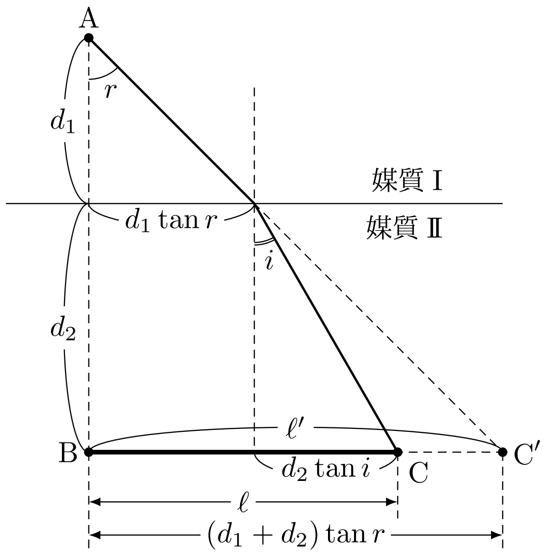
位相差は $\dfrac{2\pi}{\lambda}$(経路差)，反射による位相差，初期位相差の 3 つを考える[*11]．

【解答】

問 1　スネルの法則，および図形の考察[*12]より，微小角の近似を施して，

$$\begin{cases} \text{ス}: n_1 \sin r = n_2 \sin i\,, \\ \text{図}: \begin{cases} \ell' = (d_1 + d_2)\tan r\,, \\ \ell = d_1 \tan r + d_2 \tan i \end{cases} \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} n_1 r \fallingdotseq n_2 i\,, \\ \begin{cases} \ell' \fallingdotseq (d_1+d_2) r\,, \\ \ell \fallingdotseq d_1 r + d_2 i \end{cases} \end{cases} \qquad \therefore \ell' = \underline{\frac{n_2(d_1+d_2)}{n_1 d_2 + n_2 d_1}}\ell\,.$$



問 2　棒の端点を A，A′ とし，棒の見かけの端点を C とする．棒の A′ から出た光が B へ届くときの入射角を θ_1，屈折角を θ_2 とする．また，見かけの長さを ℓ'' とする．スネルの法則，および図形の

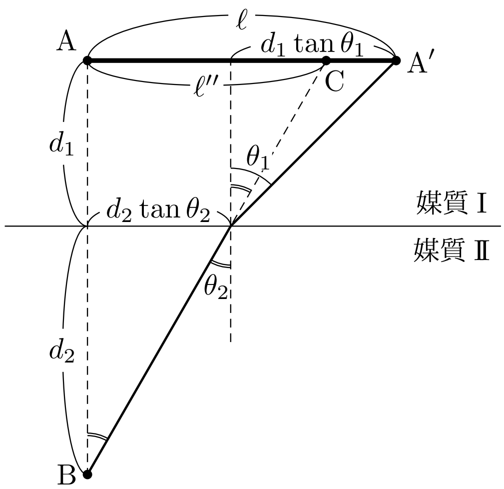
*11 屈折率 n の媒質中では波長 λ を $\dfrac{\lambda}{n}$ とする．

*12 長さと角の対応ゆえ三角比を考える．

考察より，微小角の近似を施して，

$$\begin{cases} \text{ス}：n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2\,, \\ \text{図}：\begin{cases} \ell'' = (d_1 + d_2)\tan\theta_2\,, \\ \ell = d_1 \tan\theta_1 + d_2 \tan\theta_2 \end{cases} \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} n_1\theta_1 \fallingdotseq n_2\theta_2\,, \\ \begin{cases} \ell'' \fallingdotseq (d_1 + d_2)\theta_2\,, \\ \ell \fallingdotseq d_1\theta_1 + d_2\theta_2 \end{cases} \end{cases} \qquad \therefore \ell'' = \frac{n_1}{n_2}(d_1 + d_2)\theta_2 = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{n_1(d_1 + d_2)}{n_1 d_2 + n_2 d_1}\ell}\,.$$



問 3　B から A′ が観測できなくなるような状況を考える，まず，スネルの法則は，

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \qquad \therefore \sin\theta_1 = \frac{n_2}{n_1}\sin\theta_2$$

である．A′ からの光が全反射しない（つまり棒の全貌が観測できる）条件は[*13][*14]，

$$\sin\theta_1 = \frac{n_2}{n_1}\sin\theta_2 < 1 \qquad \therefore \sin\theta_2 < \frac{n_1}{n_2}$$

$$\therefore \tan\theta_2 < \frac{n_1}{\sqrt{{n_2}^2 - {n_1}^2}}$$

である．よって，棒の全貌が見えているときの見かけの長さ $\ell'' = (d_1 + d_2)\tan\theta_2$ は，

$$\ell'' = (d_1 + d_2)\tan\theta_2 < \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{n_1}{\sqrt{{n_2}^2 - {n_1}^2}}(d_1 + d_2)}\,(= \ell_1)$$

を満たす．なお，棒の長さが ℓ_1 より長くなった場合，B から見える棒の端点は棒の途中を見ていることとなる（端点 A′ からの光は境界面で反射して B には届かない）．

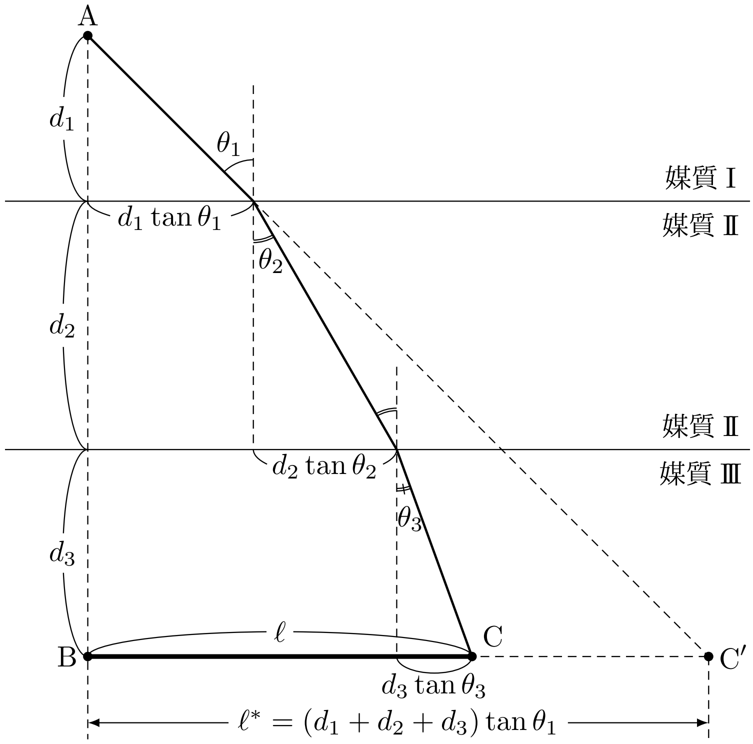
[*13] 答えを出すだけであれば，不等号の等号成立時だけを考えればよい．

[*14] 三角関数の相互関係より右式が成り立つ：$\sin\theta = \dfrac{\tan\theta}{\sqrt{1 + \tan^2\theta}}$

問 4　媒質 I，II 間の入射角を θ_1，屈折角を θ_2，媒質 II，III 間の入射角を θ_3 とする．また，見かけの長さを ℓ^* とする．スネルの法則，および図形の考察より，微小角の近似を施して，

$$\begin{cases} ス：n_1\sin\theta_1 = n_2\sin\theta_2 = n_3\sin\theta_3\,, \\ 図：\begin{cases} \ell^* = (d_1+d_2+d_3)\tan\theta_1\,, \\ \ell = d_1\tan\theta_1 + d_2\tan\theta_2 + d_3\tan\theta_3 \end{cases} \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} n_1\theta_1 \fallingdotseq n_2\theta_2 \fallingdotseq n_3\theta_3\,, \\ \begin{cases} \ell'' \fallingdotseq (d_1+d_2+d_3)\theta_1\,, \\ \ell \fallingdotseq d_1\theta_1 + d_2\theta_2 + d_3\theta_3 \end{cases} \end{cases} \qquad \therefore \ell^* = \frac{n_2n_3(d_1+d_2+d_3)}{\underline{n_1n_2d_3 + n_2n_3d_1 + n_3n_1d_2}}\ell\,.$$



B フェルマーの原理

【メモ】

・問 1 は数学の問題，問 2 のアは公式，イ，ウは速度の定義通り，エ，オは三平方の定理，カは誘導に従えばよい．

【解答】

問 1　(a_x, a_y) から $(x, 0)$ への入射光の入射角を θ とすると，$\tan\theta = \dfrac{a_x}{x - a_x}$ と書ける．同様に $(x, 0)$ から (b_x, b_y) への反射光の反射角も θ であり，$\tan\theta = \dfrac{b_x}{b_x - x}$ が成り立つ．よって，

$$\frac{a_x}{x - a_x} = \frac{b_x}{b_x - x} \qquad \therefore x = \frac{a_x b_y + b_x a_y}{a_y + b_y}.$$

問 2 ア：媒質中での速さは $\dfrac{c}{n_1}$ となる．

イ：長さ $\sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2}$ を速さ $\dfrac{c}{n_1}$ で伝わる時間を考えて，

$$t_1 = \frac{\sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2}}{c/n_1} = \frac{n_1\sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2}}{c}.$$

ウ：同様に長さ $\sqrt{{b_x}^2 + {b_y}^2}$ を速さ $\dfrac{c}{n_2}$ で伝わる時間を考えれば，

$$t_2 = \frac{\sqrt{{b_x}^2 + {b_y}^2}}{c/n_2} = \frac{n_2\sqrt{{b_x}^2 + {b_y}^2}}{c}$$

である．よって，経路 AOB に要する時間は，

$$T = t_1 + t_2 = \frac{n_1\sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2} + n_2\sqrt{{b_x}^2 + {b_y}^2}}{c}.$$

エ：三平方の定理より，

$$\overline{\mathrm{AO'}} = \sqrt{(a_x + \mathit{\Delta} x)^2 + {a_y}^2}.$$

オ：三平方の定理より，

$$\overline{\mathrm{O'B}} = \sqrt{(b_x - \mathit{\Delta} x)^2 + {b_y}^2}.$$

カ：経路 AO′B に要する時間 T^* は，

$$T^* = \frac{n_1\sqrt{(a_x + \mathit{\Delta} x)^2 + {a_y}^2} + n_2\sqrt{(b_x - \mathit{\Delta} x)^2 + {b_y}^2}}{c}$$

であるから，$\varDelta x$ ずれたことによる所要時間の変化量 $\varDelta t = T^* - T$ は，

$$\begin{aligned}
\varDelta t &= \frac{n_1\sqrt{(a_x+\varDelta x)^2+{a_y}^2}+n_2\sqrt{(b_x-\varDelta x)^2+{b_y}^2}}{c} \\
&\qquad - \frac{n_1\sqrt{{a_x}^2+{a_y}^2}+n_2\sqrt{{b_x}^2+{b_y}^2}}{c} \\
&= \frac{n_1}{c}\left\{\sqrt{{a_x}^2+2a_x\varDelta x+(\varDelta x)^2+{a_y}^2}-\sqrt{{a_x}^2+{a_y}^2}\right\} \\
&\qquad + \frac{n_2}{c}\left\{\sqrt{{b_x}^2-2b_x\varDelta x+(\varDelta x)^2+{b_y}^2}-\sqrt{{b_x}^2+{b_y}^2}\right\} \\
&\fallingdotseq \frac{n_1}{c}\left(\sqrt{{a_x}^2+2a_x\varDelta x+{a_y}^2}-\sqrt{{a_x}^2+{a_y}^2}\right) \\
&\qquad + \frac{n_2}{c}\left(\sqrt{{b_x}^2-2b_x\varDelta x+{b_y}^2}-\sqrt{{b_x}^2+{b_y}^2}\right) \\
&= \frac{n_1}{c}\left\{\sqrt{{a_x}^2+{a_y}^2}\left(\sqrt{1+\frac{2a_x}{{a_x}^2+{a_y}^2}\varDelta x}-1\right)\right. \\
&\qquad \left.+\sqrt{{b_x}^2+{b_y}^2}\left(\sqrt{1-\frac{2b_x}{{b_x}^2+{b_y}^2}\varDelta x}-1\right)\right\} \\
&\fallingdotseq \frac{n_1}{c}\frac{a_x}{\sqrt{{a_x}^2+{a_y}^2}}\varDelta x-\frac{n_2}{c}\frac{b_x}{\sqrt{{b_x}^2+{b_y}^2}}\varDelta x \\
\therefore\ \frac{\varDelta t}{\varDelta x} &= \underline{\frac{n_1}{c}\frac{a_x}{\sqrt{{a_x}^2+{a_y}^2}}-\frac{n_2}{c}\frac{b_x}{\sqrt{{b_x}^2+{b_y}^2}}}\,.
\end{aligned}$$

なお，入射角を θ_1，屈折角を θ_2 とすると，

$$\frac{a_x}{\sqrt{{a_x}^2+{a_y}^2}}=\sin\theta_1\,,\qquad \frac{b_x}{\sqrt{{b_x}^2+{b_y}^2}}=\sin\theta_2$$

であり，$\dfrac{\varDelta t}{\varDelta x}=0$ を考えれば，

$$\frac{n_1}{c}\sin\theta_1-\frac{n_2}{c}\sin\theta_2=0 \qquad \therefore\ n_1\sin\theta_1=n_2\sin\theta_2$$

とスネルの法則を得る．