I. 力学（等速円運動，仕事の計算，単振動，分裂，力積の計算）

【メモ】

・仕事の計算の分類：

$$W=\begin{cases} f\text{ が既知：}\begin{cases} f\text{ が一定：}\vec{f}\cdot\Delta\vec{x} \\ f\text{ が一定でない：}\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} f\,dx \end{cases} \\ f\text{ が未知：エネルギー収支から逆算} \end{cases}$$

・等速円運動は以下 2 式の連立.

$$\begin{cases} \text{運動方程式（中心成分）} \\ \text{つりあい}\quad\leftarrow\quad\text{使わない場合もあり} \end{cases}$$

・力積の計算の分類：

$$\vec{I}=\begin{cases} f\text{ が既知}\begin{cases} f\text{ が一定：}|\vec{f}|\Delta t \\ f\text{ が一定でない：}\displaystyle\int_{t_1}^{t_2}|\vec{f}|\,dx \end{cases} \\ f\text{ が未知：運動量収支から逆算}\begin{cases}\text{成分で計算}\\ \text{幾何的に計算}\end{cases} \end{cases}$$

【解答】

(1) 公式より，

$$F=\underline{\frac{GMm}{(R+\ell)}},\quad U=-\underline{\frac{GMm}{R+\ell}}\,.$$

(2) 月面の中心を原点に，外側に伸びる向きに r 軸を定める．仕事の定義より，

$$W=\int_R^{R+\ell}\left(-\frac{GMm}{r^2}\right)dr=\underline{GMm\left(\frac{1}{R+\ell}-\frac{1}{R}\right)}\,.$$

(3) 運動方程式（中心成分）より，

$$m\frac{v^2}{R+\ell}=\frac{GMm}{(R+\ell)^2}\qquad\therefore v=\underline{\sqrt{\frac{GM}{R+\ell}}}\,.$$

(4) 密度を ρ とすると，密度の定義より，

$$\rho=\frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

である．よって，半径 r の球内の質量は，

$$M'=\frac{4}{3}\pi r^3\cdot\rho=\underline{\left(\frac{r}{R}\right)^3 M}\,.$$

(5)　公式より，

$$F = G\frac{M'm}{r^2} = \underbrace{\frac{GMm}{R^3}}_{=k} r\,.$$

(6)　仕事の定義より，

$$W = \int_0^R \left(-\frac{GMm}{R^3}r\right)dr = -\frac{GMm}{2R}\,.$$

(7)　小物体のエネルギー収支より，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}m\cdot 0^2 - \frac{1}{2}m{v_0}^2 &= \int_0^R \left(-\frac{GMm}{R^3}r\right)dr + \int_R^{2R}\left(-\frac{GMm}{r^2}\right)dr \\ &= -\frac{GMm}{2R} - \frac{GMm}{2R} \qquad \therefore v_0 = \sqrt{2GMR}\,.\end{aligned}$$

(8)　運動方程式より，

$$ma = -\frac{GMm}{R^3}r \qquad \therefore a = -\frac{GM}{R^3}r$$

と角振動数 $\omega = \sqrt{\dfrac{GM}{R^3}}$，振動中心 $r=0$ の単振動を行うことがわかる．よって，小物体が月の内部にいる間の位置 r，速度 v は未知定数（積分定数）C，D を用いて，

$$\begin{cases} r = C\sin\left(\sqrt{\dfrac{GM}{R^3}}\,t\right) + D\cos\left(\sqrt{\dfrac{GM}{R^3}}\,t\right), \\ v = C\sqrt{\dfrac{GM}{R^3}}\cos\left(\sqrt{\dfrac{GM}{R^3}}\,t\right) - D\sqrt{\dfrac{GM}{R^3}}\sin\left(\sqrt{\dfrac{GM}{R^3}}\,t\right) \end{cases}$$

と書ける．初期条件 $r(0)=0$，$v(0)=\sqrt{\dfrac{2GM}{R}}$ より，

$$\begin{cases} 0 = D\sqrt{\dfrac{2GM}{R}} = C\sqrt{\dfrac{GM}{R^3}} \end{cases} \qquad C = \sqrt{2}\,R,\quad D = 0$$

と求まり，小物体が月の内部にいる間の位置 r は，

$$r = \sqrt{2}\,R\sin\left(\sqrt{\frac{GM}{R^3}}\,t\right)$$

と求まる．$r=R$ を解いて，

$$\begin{aligned}\sqrt{2}\,R\sin\left(\sqrt{\frac{GM}{R^3}}\,t\right) &= R \\ \sin\left(\sqrt{\frac{GM}{R^3}}\,t\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \therefore t = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{R^3}{GM}}\,.\end{aligned}$$

(9)　軌道半径が同じ等速円運動の速さは $\sqrt{\dfrac{GM}{2R}}$ であり，周回する物体の質量によらない．収容前後で人工衛星が受ける力積は，人工衛星の運動量収支より，

$$I = \Delta p = (m + m')V - mV = \underset{\sim\sim}{m'V} > 0$$

であり，$\vec{I} /\!/ \vec{V}$ より，人工衛星の運動方向 に力積を与えればよい．

Ⅱ. 電磁気（$vB\ell$ の電磁誘導，指数関数型の運動）

【メモ】

・回路の一部が動く電磁誘導は，誘導起電力の決定では $vB\ell$ の公式が基本となる．

・電磁誘導の問題構成は，①誘導起電力の決定，②回路の議論，③運動の議論，④エネルギーの議論が基本．

・解が指数関数となる微分方程式：

$$\frac{df(t)}{dt} = a\{f(t) - f_0\}$$

入試物理で出てくる上記微分方程式は $a < 0$ である．また，$a < 0$ のとき関数 $f(t)$ は f_0 に収束する．

【解答】

(1) 電流は軸からおもりの向きに生じる．よって，導体棒は時計回り方向の力を受け，時計回り に動く．

(2) 公式より，

$$F = IB\Delta r\,.$$

(3) 円運動の加速度の接線方向成分を a とする（時計回りを正）．運動方程式より，

$$ma = IB\Delta r \qquad \therefore a = \frac{IB\Delta r}{m} = \mathrm{const}$$

と等加速度運動であることがわかる．時刻 $t = 0$ で速度が $v = 0$ であることから，時刻 t における速度 v は，

$$v = \frac{IB\Delta r}{m}t$$

と書ける．円運動の速度の接線方向成分 v が半径 r と角速度 ω を用いて $v = r\omega$ と書けることを用いて，

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{IB\Delta r}{mr}t\,.$$

(4) 回路を切断すると腕木にはアンペール力が働かなくなり，加速度の接線成分は 0 となる．よって，等速円運動 となる．

(5) 回路に流れる電流を I（軸→おもり方向を正），おもりの加速度の接線成分を a（時計回りを正）とする．キルヒホッフの法則，および運動方程式より（起電力については e 側では $+V$，f 側では

$-V$，速度は $v=r\omega_1$），

$$\begin{cases} \pm V - RI - r\omega_1 B\mathit{\Delta} r = 0\,, \\ ma = IB\mathit{\Delta} r \end{cases} \qquad \therefore a = \frac{\pm V - r\omega_1 B\mathit{\Delta} r}{mR} B\mathit{\Delta} r$$

となる．角速度が一定であるためには加速度 a が 0 であればよいので，V の符号としては $+V$ となる e 側 に倒すのが適当であり，このときの起電力の大きさ V は，

$$V - r\omega_1 B\mathit{\Delta} r = 0 \qquad \therefore V = r\omega_1 B\mathit{\Delta} r\,.$$

(6)　キルヒホッフの法則より（速度は $v=r\omega_2$），

$$V - RI - r\omega_2 B\mathit{\Delta} r = 0 \qquad \therefore I = \frac{V - r\omega_1 B\mathit{\Delta} r}{R}\,.$$

(7)　速度を $v=r\omega$ とすると，半径 r が一定値を取ることから加速度は $a=\dfrac{dv}{dt}=r\dfrac{d\omega}{dt}$ と書ける．よって，キルヒホッフの法則，および運動方程式より，

$$\begin{cases} -RI - r\omega B\mathit{\Delta} r = 0\,, \\ mr\dfrac{d\omega}{dt} = IB\mathit{\Delta} r \end{cases} \qquad \therefore \frac{d\omega}{dt} = -\frac{(B\mathit{\Delta} r)^2}{mR}\omega$$

となり，ω は指数関数を解に持つ微分方程式に従うことがわかる．微分方程式の形から収束値は $\omega=0$ と判るので (c)

III. 波動（時系列を問うドップラー効果）

【メモ】

・ドップラー効果の公式：

$$f=\frac{(\text{観測者の聞く音の音速})}{(\text{観測者の聞く音の波長})}=\frac{V\pm v_{\text{観測者}}}{\dfrac{V\pm v_{\text{音源}}}{f_0}}=\frac{V\pm v_{\text{観測者}}}{V\pm v_{\text{音源}}}f_0\ (f_0\text{: 音源の振動数})$$

符号は定性的考察から判断すればよい[*1].

【解答】

(1) ア：音波の速さゆえ $\underline{V}$ である．

イ：時間 t_1 の間に観測者は u_2t_1 だけ近づくので，音波は $L-u_2t_1$ だけ進んで観測者に達する．よって，

$$Vt_1=L-u_2t_1 \qquad \therefore t_1=\underline{\frac{L}{V+u_2}}\,.$$

ウ：時間 t_1 の間に音源は u_1t_1 進むので，音源と観測者の間隔は $L-u_1t_1-u_2t_1$ となる．イの結果を代入して，

$$L-u_1t_1-u_2t_1=\underline{\frac{V-u_1}{V+u_2}L}\,.$$

エ：振動数 f で t_1 間鳴らされているからこの間生じた波の数は $ft_1=\underline{\dfrac{fL}{V+u_2}}$ 個である．

オ：音源と観測者の間の長さ $\dfrac{V-u_1}{V+u_2}L$ には，$\dfrac{fL}{V+u_2}$ 個の波が詰まっている．よって，1 個あたりの波の長さ（波長）は，

$$\lambda'=\frac{\dfrac{V-u_1}{V+u_2}L}{\dfrac{fL}{V+u_2}}=\underline{\frac{V-u_1}{L}}\,.$$

カ：（音波と逆向きに速さ u_2 で運動する）観測者に対する音速（観測者に対する音の相対速度）は，図右向き（音波の伝播方向）を正とすれば，

$$V_{\text{観測者}\to\text{音}}=V-(-u_2)=V+u_2$$

[*1] 速度で考えた方が「物理」としては良いのだろうが.

となる．よって，$\varDelta t_1$ 間に観測者が音波とすれ違った距離は $(V+u_2)\varDelta t_1$ であり，この中に含まれる波の数を数えて，

$$\frac{(V+u_2)\varDelta t_1}{\dfrac{V-u_1}{f}} = \frac{V+u_2}{V-u_1} f\varDelta t\,.$$

キ：観測者が聞く音の振動数を f' とすれば，$\varDelta t_1$ 間に観測者が聞く波の数は $f'\varDelta t_1$ と書ける．これがカと等しいことから，

$$f'\varDelta t_1 = \frac{V+u_2}{V-u_1} f\varDelta t \qquad \therefore f' = \frac{V+u_2}{V-u_1} f\,.$$

(2) ク：$\overline{\mathrm{AC}} = \dfrac{L}{\cos\theta}$ より聞き始める時刻を t とすれば，

$$t = \frac{\dfrac{L}{\cos\theta}}{V} = \frac{L}{V\cos\theta}\,.$$

ケ：AC 間には $ft = \dfrac{fL}{V\cos\theta}$ 個の波がある．

コ：長さ $\dfrac{L}{\cos\theta}$ の中に $\dfrac{fL}{V\cos\theta}$ 個の波があるから，1 個あたりの波の長さ（波長）は，

$$\lambda = \frac{\dfrac{L}{\cos\theta}}{\dfrac{fL}{V\cos\theta}} = \frac{V}{f}\,.$$

(3) サ：速さ V で $\dfrac{L}{\cos\theta}$ 伝わる時間ゆえ $t_2 = \dfrac{L}{V\cos\theta}$ である．

シ：$\overline{\mathrm{AD}} = u_1\varDelta t_2$ である．よって，

$$\overline{\mathrm{AC}} - \overline{\mathrm{AE}} = \frac{L}{\cos\theta} - u_1\varDelta t_2\cos\theta\,.$$

ス：D で発された音が C に届く時刻を t_3 とする．$t_3 - \varDelta t_2$ の時間に CD 間を伝わるので，

$$V(t_3 - \varDelta t_2) = \frac{L}{\cos\theta} - u_1\varDelta t_2\cos\theta \qquad \therefore t_3 = \varDelta t_2 + \frac{1}{V}\left(\frac{L}{\cos\theta} - u_1\varDelta t_2\cos\theta\right).$$

セ：A で発された音が C に届く時刻が t_2，D で発された音が C に届く時刻が t_3 であるから，C で音を聞いている時間は $t_3 - t_2$ である．よって，

$$t_3 - t_2 = \varDelta t_2 + \frac{1}{V}\left(\frac{L}{\cos\theta} - u_1\varDelta t_2\cos\theta\right) - \frac{L}{V\cos\theta} = \left(1 - \frac{u_1}{V}\cos\theta\right)\varDelta t_2\,.$$

ソ：$\varDelta t_2$ 間に発された波の数は $f\varDelta t_2$ である．

タ：$t_3 - t_2$ 間に C で受け取った波の数は振動数を f' とすれば $f'(t_3 - t_2) = \left(1 - \frac{u_1}{V}\cos\theta\right) f'\varDelta t_2$

である．

チ：音源から出された音と人が聞いた音の数が等しいことから，

$$\left(1-\frac{u_1}{V}\cos\theta\right)f'\mathit{\Delta} t_2 = f\mathit{\Delta} t_2 \qquad \therefore f' = \frac{V}{V-u_1\cos\theta}f\,.$$