1 力学（等加速度運動（時間追跡），動く座標系，重心）

【メモ】

・等加速度運動は①時間追跡，②エネルギーの 2 通りで考えることができる．時刻を問わない場合，基本的に②で考えると楽である．

・動く座標系内部では慣性力が生じる．慣性力は運動方程式を相対加速度で書き換えた際に生じる補正項である．

・n 個の質点（質量 m_i，位置 x_i，i は 1 から n の自然数）の重心の定義：

$$x_{\mathrm{CM}} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \cdots m_n}$$

【解答】

問 1 (1)　台上の斜面下向きに沿った方向に X 軸を定め，始状態での位置を $X = 0$ とする．物体の加速度 a は運動方程式より，

$$ma = g\sin\theta \qquad \therefore a = g\sin\theta\,.$$

であり，時刻 t（運動を始めた時刻を $t = 0$ と定める）における物体の位置 X，および速度 v は，

$$\begin{cases} X = \dfrac{1}{2}g\sin\theta t^2\,, \\ v = g\sin\theta t \end{cases}$$

と書ける．$X = \dfrac{h}{\sin\theta}$ を解いて，

$$\frac{1}{2}g\sin\theta t^2 = \frac{h}{\sin\theta} \qquad \therefore t = \frac{1}{\sin\theta}\sqrt{\frac{2h}{g}}\,.$$

(2)　前問 t での v を計算して，

$$v = g\sin\theta\cdot\frac{1}{\sin\theta}\sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{2gh}\,.$$

問 2　台上に固定された座標軸（台固定座標系と呼ぶ）として，台上の斜面下向きに沿った方向に X 軸，斜面と垂直な方向に Y 軸を定める．始状態での位置を原点とする．台固定座標系では慣性力が生じることに注意する．

(1)　台は物体から垂直抗力の反作用を受け，図の左方向に動き出す．図の右向きを正として，運動方程式より，

$$M(-a) = N\sin\theta \qquad \therefore N = \frac{Ma}{\sin\theta}\,.$$

(2)　台固定座標系では，Y 方向に運動しない．よって，台固定座標系内の運動方程式（Y 成分）より，

$$m\cdot 0 = N - mg\cos\theta + ma\sin\theta \qquad \therefore N = mg\cos\theta - ma\sin\theta\,.$$

(3)　台固定座標系内の運動方程式（X 成分）より，

$$ma' = mg\sin\theta + ma\cos\theta \qquad \therefore a' = g\sin\theta + a\cos\theta\,.$$

(4)　(1)，(2) より，

$$\frac{Ma}{\sin\theta} = mg\cos\theta - ma\sin\theta \qquad \therefore a = \frac{m\sin\theta\cos\theta}{M + m\sin^2\theta}g\,, \qquad \therefore X = m\sin\theta\cos\theta\,.$$

また，(3) より，

$$a' = g\sin\theta + \frac{m\sin\theta\cos^2\theta}{M + m\sin^2\theta}g = \frac{(M+m)\sin\theta}{M + m\sin^2\theta}g\,, \qquad \therefore Y = (M+m)\sin\theta\,.$$

(5)　地面固定系として，水平方向に x 軸，鉛直上向きに y 軸を定める．始状態での物体の位置を $(0,h)$，台の右下の頂点の位置を $\left(\dfrac{h}{\tan\theta}, 0,\right)$ となるように原点を定める．また，台の速度の x 成分を V_x，物体の速度の x 成分を v_x とする．2 物体からなる系の運動量保存則（x 成分）は，

$$MV_x + mv_x = M\cdot 0 + m\cdot 0 = 0$$

と書ける．台右下頂点の x 座標を X，物体の x 座標を x とすると，$v_x = \dfrac{dx}{dt}$，$V_x = \dfrac{dX}{dt}$ より，

$$\begin{aligned}
&M\frac{dX}{dt} + m\frac{dx}{dt} = 0\\
&\frac{d}{dt}(MX + mx) = 0\\
&\quad \therefore MX + mx = \mathrm{const} = MX(0) + mx(0) = \frac{Mh}{\tan\theta}\\
&\quad \therefore \frac{MX + mx}{M+m} = \frac{M}{M+m}\frac{h}{\tan\theta}
\end{aligned}$$

となり，重心不変の式を得る[*1]．状況設定より，$x = X$ となる場合を考えて，

$$x = X = \frac{M}{M+m}\frac{h}{\tan\theta} \qquad \therefore Z = \frac{M}{M+m}\,.$$

[*1] 内力のみを受ける系の重心速度成分が 0（すなわち系の運動量成分が 0 であるとき）であるとき，重心の位置成分は不変となる．運動量が保存しているだけでは静止しないので注意が必要である．

2 電磁気（中身の見えるコンデンサ）

【メモ】

・電荷 Q が一様に帯電した面積 S 平板の作る電場 E はガウスの法則より，真空の誘電率を ε_0 として[*2]，

$$E \cdot 2S = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad \therefore E = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S}\,.$$

これは，導出ができる状態にしておきながら覚えておきたい「公式」.

・回路の状態（電荷，電流）決定配下の法則から一意に決まる.

$$\begin{cases} \text{キルヒホッフの法則（第 2 法則）} \\ \text{電荷保存則（キルヒホッフ第 1 法則を含む）} \\ \text{素子の性質} \end{cases}$$

・平行平板コンデンサ（間隔 d）の内部電場は平行一様電場と見なせるため，コンデンサの電位差 V と極板間電場 E の間には次の関係がある.

$$V = Ed\,.$$

ここにガウスの法則を合わせれば，

$$Q = \varepsilon_0 \frac{S}{d} V$$

となり，静電容量 $C = \varepsilon_0 \dfrac{S}{d}$ を得る[*3].

・コンデンサの中身を見る問題は，電位の関係として $V = \dfrac{Q}{C}$ を使う問題，$V = Ed$ を使う問題（と両方を使い分ける問題）に分類される.

【解答】

問 1　コンデンサ（容量 C（アで求める））上側極板に蓄えられている電荷を Q，抵抗を右側に流れる電流を I とする．このとき，キルヒホッフの法則は以下の通り.

$$V - RI - \frac{Q}{C} = 0\,.$$

(ア)：公式より $C = \varepsilon_0 \dfrac{S}{d}$ である.

（イ）：スイッチを閉じた直後 $Q = 0$ である．キルヒホッフの法則より，

$$V - RI - \frac{0}{C} = 0 \qquad \therefore I = \frac{V}{R}\,.$$

[*2] ここでは，平板の端の影響を考えていない.

[*3] 他の形状のコンデンサの容量を求める場合も，ガウスの法則より E と Q の関係，電位の関係（キルヒホッフの法則）より V と E の関係を得て，これらを組み合わせることで Q と V の関係を作り，この比例係数から容量を読み取る流れとなる.

（ウ）：十分時間経過後，コンデンサに流れ込む電流は $\underset{\sim}{0}$ となる（$\because$ コンデンサの性質）.

（エ）：十分時間経過後 $I=0$ である．キルヒホッフの法則より，

$$V - R\cdot 0 - \frac{Q}{C} = 0 \qquad \therefore Q = CV = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{\varepsilon_0 SV}{d}}.$$

（オ）：公式より，

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CV^2 = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{\varepsilon_0 SV^2}{2d}}.$$

（カ）：回路図より，電池を通過した電荷はコンデンサに蓄えられている電荷の変化量に等しい．よって，定義より，

$$W_{電池} = \Delta QV = (CV-0)V = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{\varepsilon_0 SV^2}{d}}.$$

問 2 (キ)：公式より $C' = \underset{\sim\sim\sim}{\varepsilon_0\frac{S}{d+\Delta d}}$ である．

（ク）：スイッチを切っていることから，コンデンサの帯電量は $Q = \dfrac{\varepsilon_0 SV}{d}$ で保存する．よって，静電エネルギーの変化量 ΔU は，

$$\Delta U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C'} - \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{\varepsilon_0 SV^2}{2d^2}(d+\Delta d) - \frac{\varepsilon_0 SV^2}{2d} = \frac{\varepsilon_0 SV^2}{2d^2}\Delta d$$

である．よって，コンデンサのエネルギー収支より外力のする仕事 $W_{外力}$ は，

$$W_{外力} = \Delta U = \frac{\varepsilon_0 SV^2}{2d^2}\Delta d$$

と書け，$W_{外力} = F_{外力}\Delta d\cos 0 = F_{外力}\Delta d$ であり，極板のつりあいより $F_{外力} = F_{静電気}$ であるから，

$$F_{外力} = F_{静電気} = \frac{\Delta U}{\Delta d} = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{\varepsilon_0 SV^2}{2d^2}}.$$

問 3 (ケ)：合成則を使って考えればよい．真空部分からなるコンデンサ C_1 と，誘電体部分からなるコンデンサ C_2 に分割し，直列合成則を用いる．C_1，C_2 は公式よりそれぞれ $C_1 = \varepsilon_0\dfrac{S}{d/2}$，$C_2 = \varepsilon\dfrac{S}{d/2}$ であるから，誘電体挿入後のコンデンサの容量 C^* は，

$$\frac{1}{C^*} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \qquad \therefore C^* = \frac{C_1C_2}{C_1+C_2} = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{2\varepsilon_0\varepsilon}{\varepsilon_0+\varepsilon}\frac{S}{d}}.$$

（コ）：コンデンサの帯電量は $Q = \dfrac{\varepsilon_0 SV}{d}$ であるから，極板間に生じている電位差 V^* は，

$$V^* = \frac{Q}{C^*} = \frac{\dfrac{\varepsilon_0 S}{d}}{\dfrac{2\varepsilon_0\varepsilon}{\varepsilon_0+\varepsilon}\dfrac{S}{d}} = \underset{\sim\sim\sim}{\left(1+\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)\frac{V}{2}}.$$

（サ）：真空部分の電場はガウスの法則より[*4]，

$$E_{\text{真空}} = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S} + \frac{Q}{2\varepsilon_0 S} = \frac{V}{2d}\cdot 2 = \frac{V}{d}$$

と求まる．よって，誘電体下面の電位は，平行一様電場の公式より，

$$\phi_{\text{下面}} = E_{\text{真空}}\cdot\frac{d}{4} = \underset{\sim\sim}{\frac{V}{4d}}\,.$$

（シ）：公式より，

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C^*} = \frac{1}{2}\frac{\left(\dfrac{\varepsilon_0 SV}{d}\right)^2}{\dfrac{2\varepsilon_0\varepsilon}{\varepsilon_0+\varepsilon}\dfrac{S}{d}} = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\left(1+\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)\frac{\varepsilon_0 SV^2}{4d}}\,.$$

【補足】誘電体内部の電場，分極電荷，誘電体上面の電位

誘電体内部の電場は，誘電体内部の電場の電場は，比誘電率 $=\varepsilon_{\mathrm{r}} = \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon}$ を用いて以下のように書ける．

$$E_{\text{内部}} = \frac{1}{\varepsilon_{\mathrm{r}}}E_{\text{真空}} = \frac{1}{\varepsilon/\varepsilon_0}\frac{V}{d} = \frac{\varepsilon_0 V}{\varepsilon d} \qquad \cdots\cdots①$$

一方で，誘電体内部の電場 $E_{\text{内部}}$ は，誘電体の分極によって生じた分極電荷の作る電場 $E_{\text{分極}}$ と，外部電場 $E_{\text{真空}}$ の合成電場である．誘電体は，誘電分極によって下面に $+\delta$，上面に $-\delta$ の分極電荷を生じる．分極電荷 $\pm\delta$ の作る電場はガウスの法則より $\dfrac{\delta}{2\varepsilon_0 S}$ と等しいため（サの脚注参照），分極電場は下面から上面の向きに $E_{\text{内部}} = \dfrac{\delta}{\varepsilon_0 S}$ となる．よって，誘電体内部の電場 $E_{\text{内部}}$ は上から下向きに，

$$E_{\text{内部}} = E_{\text{真空}} - E_{\text{分極}} = \frac{V}{d} - \frac{\delta}{\varepsilon_0 S} \qquad \cdots\cdots②$$

となる．

よって，①，②より，

$$\frac{\varepsilon_0 V}{\varepsilon d} = \frac{V}{d} - \frac{\delta}{\varepsilon_0 S} \qquad \therefore \delta = \left(1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)\frac{\varepsilon_0 SV}{d}\,.$$

さて，誘電体上面の電位 $\phi_{\text{上面}}$ は

$$\phi_{\text{上面}} = E_{\text{真空}}\cdot\frac{d}{4} + E_{\text{内部}}\cdot\frac{d}{2} = \frac{V}{d}\frac{d}{4} + \frac{\varepsilon_0 V}{\varepsilon d}\frac{d}{2} = \left(\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)\frac{V}{2}$$

となり，同様に極板上面の電位を計算すれば（コ）を得る．

[*4] $\pm Q$ に帯電している帯電している各極版の作る電場 $E_\pm$ はガウスの法則より，

$$E_\pm\cdot 2S = \frac{Q}{\varepsilon_0}E = \frac{|\pm Q|}{\varepsilon_0 S} \qquad \therefore E_\pm = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S} = \frac{V}{2d}\,.$$

3 熱力学（熱あり過程，潜熱）

【メモ】

・熱あり過程の定石は以下の通り．

$$\begin{cases} \text{状態決定：}\begin{cases} \text{可動部分のつりあい} & \to \text{圧力 } P \text{ の決定} \\ \text{状態方程式} & \to \text{温度 } T \text{ の決定（モル数 } n \text{ の場合も）} \end{cases} \\ \text{第 1 法則：熱の決定式} \end{cases}$$

熱力学第 1 法則は熱の決定式で，内部エネルギー変化は公式，気体のする仕事は PV 図の面積評価によって行う．

・今回は，気体の定積モル比熱 C_v がわかっていないため内部エネルギー U の公式「$U = nC_\mathrm{v}T$」が使えない．そこで，気体のする仕事 W は定石通り PV 図の面積評価で求め，Q を計算できるように誘導し，熱力学第 1 法則より $\varDelta U$ を計算する運びとなっている．とは言え，定石通り計算すれば全てが求まる．

・熱量計算は，物理量の定義を抑える（単位を読めるようにする）．

【解答】

問 1　比熱の定義より，水の温度上昇に伴う熱 q_1 は，

$$c = \frac{1}{m}\frac{q_1}{100-20} \qquad \therefore q_1 = 80mc$$

である．また，この際の蒸発熱 q_2 は，1 g あたりの蒸発熱が h だから $q_2 = mh$ である．よって，状態 A から状態 B の間の吸収熱は，

$$Q_1 = q_1 + q_2 = \underline{m(80c+h)}\,.$$

問 2　水蒸気の圧力を P，大気圧を P_0，ピストンの断面積を S とする．ピストンのつりあいより，

$$PS = P_0S \qquad \therefore P = P_0 \qquad \cdots\cdots ①$$

である．状態 B における水蒸気の体積を SL とすると，状態方程式は，

$$PSL = \frac{m}{M}R\cdot 373 \qquad \cdots\cdots ②$$

である．

さて，気体のする仕事は PV 図の面積評価をすればよい．ピストンのつりあいより，PV 図は V 軸に平行なグラフとなる（図略）ので，①，②より，

$$W_1 = P_0(SL-0) = \underline{\frac{373mR}{M}}\,.$$

問 3　熱力学第 1 法則より，

$$\Delta U_1 = Q_1 - W_1 = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{m\left(80c + h - \frac{373R}{M}\right)}.$$

問 4　与えられた数値を代入して，

$$\begin{aligned}\Delta U_1 &= m\left(80c + h - \frac{373R}{M}\right)\\ &= 9.00\,\mathrm{g} \times \left(80\,\mathrm{K} \times 4.18\,\mathrm{J/(g\cdot K)} + 2.26 \times 10^3\,\mathrm{J/g} - \frac{373 \times 8.31\,\mathrm{J/(mol\cdot K)}}{18.0\,\mathrm{g/mol}}\right)\\ &\fallingdotseq 9.00\,\mathrm{g} \times (3.34 + 22.6 - 1.72) \times 10^2\,\mathrm{J/g}\\ &\fallingdotseq \underset{\sim\sim\sim\sim\sim}{2.2 \times 10^2\,\mathrm{J}}.\end{aligned}$$

問 5　ピストンのつりあいより，状態 B，C ともに水蒸気の圧力は P_0 である．よって，状態方程式より，

$$\begin{cases} \mathrm{B}: P_0 SL = \dfrac{m}{M}R \cdot 373\,, \\ \mathrm{C}: P_0 \cdot 2SL = \dfrac{m}{M}RT_\mathrm{C} \end{cases} \qquad \therefore T_\mathrm{C} = 2 \cdot 373\,\mathrm{K} = \underset{\sim\sim\sim}{746\,\mathrm{K}}.$$

問 6　定圧比熱はその単位から「定圧条件下で，対象の気体 1 g を 1 K 上昇させるのに要する熱量」とわかる（定圧条件下というのはその名前から判断できる）．状態 B から状態 C はピストンのつりあいから圧力は常に大気圧 P_0 と等しい．よって，水蒸気の（定圧）比熱 $c_{\text{水蒸気}}$ の定義より，

$$\begin{aligned}c_{\text{水蒸気}} &= \frac{1}{m}\frac{Q_2}{T_\mathrm{C} - 373}\\ \therefore Q_2 &= mc(T_\mathrm{C} - 373)\\ &= 9.00\,\mathrm{g} \cdot 2.00\,\mathrm{J/(g\cdot K)} \cdot (746 - 373)\,\mathrm{K}\\ &\fallingdotseq \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{1.55 \times 10^3\,\mathrm{J}}.\end{aligned}$$

問 7　状態 B から状態 C の過程における仕事は PV 図の面積評価（図略）から，

$$W_2 = P_0(2SL - SL) = P_0 SL = \frac{373mR}{M}.$$

である．熱力学第 1 法則より，

$$\Delta U_2 = Q_2 - W_2$$

であるから，$Q_2 = 373mc_{\text{水蒸気}}$ を踏まえ，

$$\begin{aligned}\frac{\Delta U_2}{W_2} = \frac{Q_2}{W_2} - 1 &= \frac{c_{\text{水蒸気}}M}{R} - 1\\ &= \frac{2.00\mathrm{J/(g\cdot K)} \cdot 18.0\,\mathrm{g/mol}}{8.31\mathrm{J/(mol\cdot K)}} - 1\\ &\fallingdotseq \underset{\sim\sim}{3.3}.\end{aligned}$$

【補足】水蒸気の定積モル

最後の設問である問 7 は定積モル比熱（の R の係数）の計算となっている．状態 B（モル数を n，温度を T_{B} とする）→ C の過程で系（水蒸気）が外界にした仕事 W_2 は，

$$W_2 = P_0(2SL - SL) = P_0SL = nRT_{\mathrm{B}}$$

となる．一方，この間の内部エネルギー変化 $\varDelta U_2$ は，定積モル比熱を C_{v} とすれば，

$$\varDelta U_2 = nC_{\mathrm{v}}(T_{\mathrm{C}} - T_{\mathrm{B}}) = nC_{\mathrm{v}}T_{\mathrm{B}}$$

となる．ここで，$T_{\mathrm{C}} = 2T_{\mathrm{B}}$ を用いた．

以上より，$\dfrac{\varDelta U_2}{W_2}$ を計算すると，

$$\frac{\varDelta U_2}{W_2} = \frac{nC_{\mathrm{v}}T_{\mathrm{B}}}{nRT_{\mathrm{B}}} = \frac{C_{\mathrm{v}}}{R}$$

となり，$\dfrac{\varDelta U_2}{W_2}$ が定積モル比熱 C_{v} の R にかかる係数を表すことが確認できる．単原子分子理想気体の場合 $\dfrac{C_{\mathrm{v}}}{R} = \dfrac{3}{2}$，二原子分子理想気体の場合 $\dfrac{C_{\mathrm{v}}}{R} = \dfrac{5}{2}$ ということは覚えなければいけない．