1 力学（天体の関与する運動，分離）

【メモ】

・天体が絡む運動：

① 円軌道の場合：円運動ゆえ円運動と同様例外的に扱う．

$$\begin{cases} \text{運動方程式の中心成分} \\ \text{（力のつりあい）} \end{cases}$$

なお，運動の周期は，速さ v で円周 $2\pi \times$（半径）だけ進む時間を考えればよい．

② 円以外の軌道：

$$\begin{cases} \text{力学的エネルギー保存則} \\ \text{面積速度保存則} \end{cases}$$

また，楕円軌道（長半径 a，短半径 b）の場合は周期 T が存在し，その決定は以下の 2 通り存在する（ケプラー第 3 法則を利用するのが一般的）．

$$\begin{cases} \dfrac{T^2}{a^3} = \mathrm{const} = \text{（同一天体周りの別軌道での値）} \quad \leftarrow \quad \text{ケプラー第 3 法則} \\ \dfrac{\pi ab}{T} = \text{（ある地点での面積速度）} \end{cases}$$

・衝突/分裂時は力の詳細が不明なため，問題文で考えているモデル（平たく言えば条件）を与える必要がある．

$$\begin{cases} \text{外力のない方向の運動量保存則} \\ \text{問題文の条件} \end{cases}$$

なお，固定面など外力制御された面との衝突では運動量は保存しない．

【解答】

問 1（ア）：公式より $a_{\text{中心}} = \dfrac{v^2}{r}$ である．

（イ）：公式より $F = G\dfrac{Mm}{r}$ である．

（ウ）：速さ v で円周 $2\pi r$ 運動するのに要する時間を考えればよい．よって，$T = \dfrac{2\pi r}{v}$ である．

なお，運動方程式（中心成分）より，

$$m\frac{v^2}{r} = G\frac{Mm}{r^2} \qquad \therefore v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

であり，周期 T は，

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} r^{\frac{3}{2}}$$

と書ける．これが問題文で与えられている．

問 2 (1) $T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{GM}} r^{\frac{3}{2}}$ より，

$$\frac{r_\mathrm{f}}{r_\mathrm{i}} = \frac{{T_\mathrm{f}}^{\frac{2}{3}}}{{T_\mathrm{i}}^{\frac{2}{3}}} = \left(\frac{1.5}{24}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{16^{\frac{1}{3}}}\right)^2 \fallingdotseq \left(\frac{1}{5/2}\right)^2 = \frac{4}{25} = \underset{\sim\sim}{0.16}\,.$$

(2) $v = \sqrt{\dfrac{GM}{r}}$ より，

$$\frac{v_\mathrm{f}}{v_\mathrm{i}} = \sqrt{\frac{r_\mathrm{i}}{r_\mathrm{f}}} \fallingdotseq \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2} = \underset{\sim\sim}{2.5}\,.$$

問 3 (1) 分離後の物体 α の速度を v_2 とする．問題文の条件より，人工衛星から見た物体 α の相対速度 $v_{1\,\to\,2}$ は，

$$|v_{1\,\to\,2}| = |v_2 - v_1| = u \qquad v_2 - v_1 = \pm u$$

と書ける[*1]．よって，物体と人工衛星からなる系の運動量保存則，および条件より，

$$\begin{cases} \dfrac{m}{2}v_1 + \dfrac{m}{2}v_2 = mv\,, \\ v_2 - v_1 = \pm u \end{cases} \qquad \therefore v_1 = v \mp \frac{u}{2}$$

と求まる．$v_1 > v$ より，

$$v_1 = \underset{\sim\sim\sim}{v + \frac{u}{2}}\,.$$

(2) 点 B での速さを V とする．面積速度保存則より，

$$V = \underset{\sim\sim}{\frac{r}{R}v_1}\,.$$

(3) 楕円軌道ゆえ，面積速度保存則，および力学的エネルギー保存則より，

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}RV = \dfrac{1}{2}rv_1\,, \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{m}{2}V^2 + \left(-G\dfrac{Mm/2}{R^2}\right) = \dfrac{1}{2}\dfrac{m}{2}{v_1}^2 + \left(-G\dfrac{Mm/2}{r^2}\right) \end{cases}$$

$$\therefore v_1 = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim}{\sqrt{\frac{R}{R+r}\frac{2GM}{r}}}\,.$$

[*1] 分離後，物体は人工衛星に対して遠ざかる方向に運動しなければ分離後すぐに再衝突してしまう．そのため，相対速度は $-u$ と判断できる（が，ここでは問題の指示に従った）．

(4)　(1)，(3)，$v = \sqrt{\dfrac{GM}{r}}$ より，

$$v\sqrt{\frac{2R}{R+r}} = v + \frac{u}{2} \qquad \therefore u = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{2v\left(\sqrt{\frac{2R}{R+r}} - 1\right)}.$$

(5)　無限遠での運動エネルギーを K_∞ とする．無限遠に達しないためには K_∞ が存在しなければよい．すなわち $K_\infty < 0$ であればよい．力学的エネルギー保存則より，

$$\begin{aligned} K_\infty + 0 = \frac{1}{2}\frac{m}{2}{v_1}^2 + \left(-G\frac{Mm/2}{r^2}\right) &< 0 \\ \left(v + \frac{u}{2}\right)^2 - \frac{2GM}{r} &< 0 \\ \left\{v + 2\left(\sqrt{2}+1\right)v\right\}\left\{v - 2\left(\sqrt{2}+1\right)v\right\} &< 0 \qquad \therefore \frac{u}{v} < 2\left(\sqrt{2}-1\right) \fallingdotseq \underset{\sim\sim}{0.83}\,. \end{aligned}$$

2 電磁気（金属電子論，ホール効果）

【メモ】

・金属電子論は特に心配する必要はなく，単なる荷電粒子の運動である．不安であれば，加速→停止（速い減速）→加速…を繰り返すパターン（この問題），速度に比例する抵抗のパターンのそれぞれを抑えておく．

【解答】

問 1 (1) 金属内の電場の大きさ E は，平行一様電場の公式より $E = \dfrac{V}{L}$ である．よって，電子が受ける静電気力は，

$$F = eE = \frac{eV}{L}.$$

(2) 運動方程式より，

$$ma = \frac{eV}{L} \qquad a = \frac{eV}{mL}.$$

問 2 (1) 等加速度運動ゆえ，

$$\varDelta x = 0 \cdot t\frac{1}{2}aT^2 = \frac{1}{2}aT^2.$$

(2) $\overline{v} = \dfrac{\varDelta x}{T}$ より，

$$\overline{v} = \frac{1}{2}aT = \frac{eVT}{2mL}.$$

問 3 (1) 電流の定義より，

$$I = \left|\frac{\varDelta Q}{\varDelta t}\right| = \frac{|(-e)dw\overline{v}\varDelta tn|}{\varDelta t} = en\overline{v}dw.$$

(2) 仕事率の定義より，

$$P = eE \cdot \overline{v} = \frac{eV}{L}\overline{v}.$$

(3) 自由電子は単位体積当たり n 個含まれているので，直方体中には $N = ndwL$ 個存在する．これを乗じればよい．

(4) 題意より N 個の電子が受ける仕事率の総和を考えて

$$J = NP = ndwL \cdot \frac{eV}{L}\overline{v}$$

であり，一方で消費電力は

$$J = RI^2 = R(en\overline{v}dw)^2$$

である．よって，

$$R(en\overline{v}dw)^2 = ndwL \cdot \frac{eV}{L}\overline{v}$$

$$\therefore R = \frac{ndwL \cdot \dfrac{eV}{L}\overline{v}}{(en\overline{v}dw)^2} = \frac{V}{en\overline{v}dw} = \frac{2mL}{e^2ndwT}\,.$$

問 4 (1) クーロン力とローレンツ力がつりあう状況を考えればよいよって，

$$0 = eE_{\mathrm{H}} - e\overline{v}B \qquad \therefore E_{\mathrm{H}} = \overline{v}B\,.$$

(2) 自由電子は，y 軸正方向にローレンツ力を受ける．そのため，面 EFGH 側が負に帯電する．

(3) $I = en\overline{v}dw$ より，

$$\frac{E_{\mathrm{H}}}{IB} = \frac{1}{endw}\,.$$

3 波（固有振動，ドップラー効果）

【メモ】

・固有振動の問題は以下の手順で考察する．

①装置の長さと波長を対応付ける．

$$②\begin{cases} \text{弦の場合}\begin{cases} v = f\lambda \\ v = \sqrt{\dfrac{\text{張力}}{\text{線密度}}} \end{cases} \\ \text{気柱の場合：} v = f\lambda \end{cases}$$

・固有振動は弦（両端節），気柱（開管が両端腹，閉管が腹と節）のそれぞれを押さえる．気柱の固有振動において境界が自由端のとき，開口端補正を考慮する必要がある．

・ドップラー効果の公式：

$$f = \frac{(\text{観測者の聞く音の音速})}{(\text{観測者の聞く音の波長})} = \frac{V \pm v_{\text{観測者}}}{\dfrac{V \pm v_{\text{音源}}}{f_0}} = \frac{V \pm v_{\text{観測者}}}{V \pm v_{\text{音源}}} f_0 \quad (f_0\text{: 音源の振動数})$$

符号は定性的考察から判断すればよい[*2]．

【解答】

問 1 (1) 波の基本式より $f = \frac{c}{\lambda}$ である．

(2) 閉管の共鳴（固有振動）を考えて，

$$\frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{2}(m-1) = s$$

$$\therefore \lambda = \frac{4s}{2m-1} \qquad \therefore f_{\text{右}} = \frac{c}{2s}\left(m - \frac{1}{2}\right).$$

(3) 開管の共鳴（固有振動）を考えて，

$$\frac{\lambda}{2}n = s$$

$$\therefore \lambda = \frac{n}{2L} \qquad \therefore f_{\text{左}} = \frac{c}{2L}n.$$

(4) $s = L$ である．$f_{\text{左}}$ において $m = 1$ を考えて，

$$f_1 = \frac{c}{4s}.$$

*2 速度で考えた方が「物理」としては良いのだろうが．

(5)　$f_{右}$ において $n=1$ を考えて，

$$f_2 = \underset{\sim\sim}{\frac{c}{2L}}.$$

(6)　$f_{右} = \dfrac{c}{2L}$ の下で，$f_{左}$ の $m=2$ となる場合を考えればよい．よって，

$$\frac{3}{2}\frac{c}{2s} = \frac{c}{2L} \qquad \therefore s = \frac{3}{2}L.$$

(7)　左右それぞれが共鳴を起こすような振動数は，$s = \dfrac{3}{2}L$ を代入すればそれぞれ，

$$f_{左} = \frac{1}{6}\frac{c}{L},\ \frac{1}{2}\frac{c}{L},\ \frac{5}{6}\frac{c}{L},\ \frac{7}{6}\frac{c}{L},\ \frac{3}{2}\frac{c}{L},\cdots$$
$$f_{右} = \frac{1}{2}\frac{c}{L},\ \frac{c}{L},\ \frac{3}{2}\frac{c}{L},\cdots$$

である．よって，$\dfrac{1}{2}\dfrac{c}{L}$ の次に両方が同時に固有振動する状況を拾えば

$$f_3 = \frac{3}{2}\frac{c}{L}.$$

問 2 ア：$\dfrac{a}{10} = \dfrac{c}{20}t$ を解いて $t = \dfrac{2a}{c}$ である．

イ：音速 c より $c \cdot \dfrac{2a}{c} = 2a$ である．

♯：$2a$ の位置である E とわかる．

ウ：近付いてくる際に聞く振動数 $f_{近}$ は公式より，

$$f_{近} = \frac{c}{c - \frac{c}{20}}f = \frac{c}{\frac{19}{20}\frac{c}{f}} \qquad \therefore \lambda_{近} = \frac{19}{20}\frac{c}{f}.$$

エ：上記公式より $f_{近} = \dfrac{20}{19}f$ である．

オ：遠ざかる際に聞く振動数 $f_{遠}$ は公式より，

$$f_{遠} = \frac{c}{c + \frac{c}{20}}f = \frac{c}{\frac{21}{20}\frac{c}{f}} \qquad \therefore \lambda_{遠} = \frac{21}{20}\frac{c}{f}.$$

カ：上記公式より $f_{遠} = \dfrac{20}{21}f$ である．

キ：基本振動ゆえ管長は $\dfrac{1}{2}$ 波長に等しい．よって，

$$\frac{\lambda_{近}}{2} = \ell \qquad \therefore \ell = \frac{19}{40}\frac{c}{f}.$$