$\boxed{1}$ 力学（非等速円運動，動く座標系内部の運動）

【メモ】

・非等速円運動は以下 2 式の連立.

$$\begin{cases} \text{運動方程式（中心成分）} \\ \text{力学的エネルギー保存則} \end{cases}$$

・動く座標系内部では，座標系の加速度度逆向きに見かけの力（慣性力）が生じる．これは運動方程式の加速度を相対加速度に書き換える際に生じる補正項である.

【解答】

問 1 (1) 力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgr\cos\theta = mgr \qquad \therefore v = \underline{\sqrt{2gr(1-\cos\theta)}}\,.$$

(2) 運動方程式（中心成分）より，

$$m\frac{v^2}{r} = mg\cos\theta - N \qquad \therefore N = \underline{mg(3\cos\theta - 2)}\,.$$

(3) $N = 0$ を解いて $\cos\theta_0 = \underline{\frac{2}{3}}$ である.

問 2 (1) 水平左向きに $N\sin\theta$ である.

(2) 台 A の鉛直方向のつりあいより，$N_{\mathrm{A}} = \underline{Mg + N\cos\theta}$ である.

(3) 静止摩擦力大きさ R の最大値（上限値）は μN_{A} である．角度 θ にあるときの台 A と物体 B の間の垂直抗力の大きさは $N = mg(3\cos\theta - 2)$ であり，$\theta = \theta_1$ で滑りだすことから，

$$R = \mu N_{\mathrm{A}} = \underline{\mu g\{M + m\cos\theta_1(3\cos\theta_1 - 2)\}}\,.$$

(4) 一方で，台 A の水平方向のつりあいより，

$$\begin{aligned} M\cdot 0 &= R - N\sin\theta_1 \\ 0 &= \mu g\{M + m\cos\theta_1(3\cos\theta_1 - 2)\} - mg(3\cos\theta_1 - 2)\sin\theta_1 \\ \therefore \mu &= \underline{\frac{m\sin\theta_1(3\cos\theta_1 - 2)}{M + m\cos\theta_1(3\cos\theta_1 - 2)}}\,. \end{aligned}$$

(5) $\theta = \theta_1$ のときの物体 B の速さを v とすると，力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgr\cos\theta_1 = mgr \qquad \therefore v = \sqrt{2gr(1-\cos\theta_1)}$$

である．この結果は後の計算で用いる．

さて，滑りだしてからは摩擦は動摩擦力に切り替わる．運動方程式（水平成分）は水平右向きを正として，

$$M(-A) = \mu' N_{\mathrm{A}} - N\sin\theta$$

である．一方で，物体 B は，台 A とともに動く座標系では円運動を行う（台 A の面上を運動するため相対運動の軌道は円軌道となる）．よって，台 A に対する物体 B の相対速度を $\vec{v}_{\mathrm{AB}} = \vec{v}_{\mathrm{B}} - \vec{v}_{\mathrm{A}}$ とすれば，台 A とともに運動する座標系における物体 B の運動方程式（中心成分）は，

$$m\frac{|\vec{v}_{\mathrm{AB}}|^2}{r} = -N + mg\cos\theta - mA\sin\theta$$

となる．ここで，

$$|\vec{v}_{\mathrm{AB}}|^2 = (\dot{x}_{\mathrm{B}} - \dot{x}_{\mathrm{A}})^2 + (\dot{y}_{\mathrm{B}} - \dot{y}_{\mathrm{A}})^2$$

であり[*1]，台 A が鉛直方向に運動しないことから $\dot{y}_{\mathrm{A}} = 0$ は常に成り立つ．また，台 A が滑り台した直後は $\dot{x}_{\mathrm{A}} = 0$ であるため，$\theta = \theta_1$ の瞬間，

$$|\vec{v}_{\mathrm{AB}}|^2_{\theta=\theta_1} = \dot{x}_{\mathrm{B}}^2 + \dot{y}_{\mathrm{B}}^2 = |\vec{v}_{\mathrm{B}}|^2 = v^2 = 2gr(1-\cos\theta_1)$$

が成り立つ．最後の等号では，$\theta = \theta_1$ のときに $v = \sqrt{2gr(1-\cos\theta_1)}$ であることを用いた．

以上，台 A の運動方程式（水平成分），および台 A とともに動く座標系内部での物体 B の運動方程式（中心成分）より，

$$\begin{cases} M(-A) = \mu'(Mg + N\cos\theta_1) - N\sin\theta_1\,, \\ m\dfrac{2gr(1-\cos\theta_1)}{r} = -N + mg\cos\theta_1 - mA\sin\theta_1 \end{cases}$$

$$\therefore A = \underline{\frac{m(\sin\theta_1 - \mu'\cos\theta_1)(3\cos\theta_1 - 2) - \mu' M}{M + m\sin\theta_1(\sin\theta_1 - \mu'\cos\theta_1)}g}\,,$$

$$\therefore N = \frac{M(3\cos\theta_1 - 2 + \mu')}{M + m\sin\theta_1(\sin\theta_1 - \mu'\cos\theta_1)}mg\,.$$

*1 $\dot{x}$ とは $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$，すなわち速度の x 成分である．y についても同様．

2 電磁気（$vB\ell$ 公式の電磁誘導，交流回路）

【メモ】

・電磁誘導の基本構成は，①誘導起電力の決定，②回路の議論，③運動の議論，④エネルギーの変換，という作りとなっている．これを知っているだけで見通しがよくなるので押さえておきたい．

・電気回路の状態決定は以下の 3 種類の式で一意に決まる．

$$\begin{cases}\text{キルヒホッフ第 2 法則}\\ \text{電荷保存則（キルヒホッフ第 1 法則も含む）}\\ \text{素子の性質}\end{cases}$$

性質を暗記しない素子（電球やダイオードなど）については，問題文でその性質が与えられる．

【解答】

問 1 (1)　負電荷ゆえフレミング左手則と逆方向にローレンツ力を受ける．すなわち Q の方向である．

(2)　導体内部の電子は一斉に O の方向に動き，瞬間的に電荷分布が変動して内部に電場が生じ電子はつりあう．よって，クーロン力は O → P の方向に生じるため電場は P → O とわかり，P が高電位とわかる．

(3)　半径 ℓ，角度 $\omega_{\mathrm{A}}\Delta t$ の扇方の面積ゆえ $\Delta S=\dfrac{1}{2}\ell^2\omega_{\mathrm{A}}\Delta t$ である．

(4)　ファラデイの法則より，

$$V=\left|-\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right|=\left|-B\frac{\Delta S}{\Delta t}\right|=\frac{1}{2}B\ell^2\omega_{\mathrm{A}}\,.$$

(5)　キルヒホッフの法則より，

$$V-\frac{Q_0}{C}=0 \qquad \therefore Q_0=CV=\frac{1}{2}CB\ell^2\omega_{\mathrm{A}}\,.$$

問 2 (6)　キルヒホッフの法則より $Q=CV_0\cos(\omega_{\mathrm{B}}t)$ である．よって，

$$I=-\frac{dQ}{dt}=\omega_{\mathrm{B}}CV_0\sin(\omega_{\mathrm{B}}t)\,.$$

(7)　コイルの電位降下は $V_{\mathrm{L}}=-L\dfrac{dI}{dt}$ より，

$$V_{\mathrm{L}}=-L\frac{dI}{dt}=-{\omega_{\mathrm{B}}}^2LCV_0\cos(\omega_{\mathrm{B}}t)\,.$$

(8)　キルヒホッフの法則より，

$$\begin{aligned}0&=\frac{Q}{C}-L\frac{dI}{dt}\\ \therefore 0&=\left(1-{\omega_{\mathrm{B}}}^2LC\right)V_0\cos(\omega_{\mathrm{B}}t)\end{aligned}$$

が成り立つ．任意の時刻 t で両辺が成立するような ω_{B} を考えれば，

$$\omega_{\mathrm{B}} = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{1}{\sqrt{LC}}}\,.$$

問 3 (1) 公式より $C_1 = \underset{\sim\sim}{\varepsilon\frac{r^2}{2d}}$ である．

(2) 間隔 d のコンデンサの容量と等しい．よって，公式より $C_2 = \underset{\sim\sim}{\varepsilon\frac{r^2}{d}}$ である．

3 波（干渉）

【メモ】

・干渉条件は整数を m として，

$$
\begin{aligned}
（位相差）&= \frac{2\pi}{\lambda}（経路差）+（初期位相差）+（反射に伴う位相のずれ）\\
&= \begin{cases} 2m\pi & （強め合い）\\ (2m-1)\pi & （弱め合い）\end{cases}
\end{aligned}
$$

特に，媒質中では $\lambda \to \dfrac{\lambda}{n}$ とする（n は屈折率）.

【解答】

問 1 (1) 波の伝播速さは $v = f\lambda$ である．よって，求める時間は $t_1 = \dfrac{h}{f\lambda}$ である.

(2) $\overline{\mathrm{S}_1'\mathrm{O}} = \sqrt{h^2+d^2}$ である．よって，

$$
t_2 = \frac{\sqrt{h^2+d^2}}{f\lambda} = \frac{h}{f\lambda}\sqrt{1+\left(\frac{d}{h}\right)^2} \fallingdotseq \frac{h}{f\lambda}\left\{1+\frac{1}{2}\left(\frac{d}{h}\right)^2\right\}
$$

$$
\therefore t_2 - t_1 = \frac{1}{2f\lambda h}d^2\,.
$$

(3) $\overline{\mathrm{S}_1'\mathrm{P}} = \sqrt{h^2+(x-d)^2}$，$\overline{\mathrm{S}_2'\mathrm{P}} = \sqrt{h^2+(x+d)^2}$ である．よって，経路差は,

$$
\begin{aligned}
\overline{\mathrm{S}_2'\mathrm{P}} - \overline{\mathrm{S}_1'\mathrm{P}} &= \sqrt{h^2+(x+d)^2} - \sqrt{h^2+(x-d)^2}\\
&= h\left\{\sqrt{1+\left(\frac{x+d}{h}\right)^2}\right\} - h\left\{\sqrt{1+\left(\frac{x-d}{h}\right)^2}\right\}\\
&\fallingdotseq h\left\{1+\frac{1}{2}\left(\frac{x+d}{h}\right)^2\right\} - h\left\{1+\frac{1}{2}\left(\frac{x-d}{h}\right)^2\right\}\\
&= \frac{2xd}{h}
\end{aligned}
$$

となる．よって，弱め合いの干渉条件は m 次の弱め合いの位置を x_m とすれば,

$$
\frac{2\pi}{\lambda}\frac{2x_m d}{h} = (2m+1)\pi \qquad \therefore x_m = \frac{h\lambda}{2d}\left(m+\frac{1}{2}\right)
$$

と書けるから，O に最も近い位置 $x = x_m$ は,

$$
x = x_0 \frac{\lambda}{4d}h\,.
$$

(4)　位相差は，

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot 0 + 0 - (-2\pi f \Delta t) = 2\pi f \Delta t$$

である．よって，弱め合いの干渉条件より，

$$2\pi f \Delta t = (2m+1)\pi$$

である．題意より最小となる Δt を考えて，

$$2\pi f \Delta t = \pi \qquad \therefore \Delta t = \underset{\sim\sim}{\frac{1}{2f}}\,.$$

問 2 (1)　気体定数を R とすると，

$$v = \sqrt{C\frac{PV}{n}} = \sqrt{CRT}$$

と書ける．よって，

$$\begin{aligned} v - v_0 &= \sqrt{CR(T_0 + \Delta T)} - \sqrt{CRT_0} \\ &= \sqrt{CRT_0}\left(\sqrt{1 + \frac{\Delta T}{T_0}} - 1\right) \\ &\fallingdotseq \sqrt{CRT_0}\cdot\frac{\Delta T}{2T_0} \\ &= \underset{\sim\sim\sim}{\frac{v_0}{2T_0}}\Delta T\,. \end{aligned}$$

(2)　問 1(3) より $x = \dfrac{h\lambda}{4d} = \dfrac{hv}{4df}$ である．よって，

$$\Delta x = \frac{h\Delta v}{4df} = \frac{h}{4df}\cdot D\Delta T = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{Dh}{4df}}\Delta T\,.$$

問 3 (1) **定性的には**：

音は S_2' からの方が早く出始めるため，時刻による位相は S_1' が大きくなる．よって，位相差が 0 となるような点は S_1 側に観測される．

定量的には：

管 U_1 中の音波の伝播速さを v_0，管 U_2 中の音波の伝播速さを $v_0 + \Delta v$ とする．S_1''，S_2'' それぞれから音が生じる時刻を $t=0$ とすると，S_1'，S_2' に音が届く時刻 t_1，t_2 はそれぞれ，

$$t_1 = \frac{L}{v_0}, \qquad t_2 = \frac{L}{v_0 + \Delta v}$$

である．よって，位置 x_m における強め合いの条件は，

$$\frac{2\pi}{\lambda}\frac{2x_m d}{h}+2\pi f(t_2-t_1)=2m\pi$$

と書ける．はじめ O で観測されていた強め合いは $m=0$ に該当するので，$m=0$ の位置を計算すれば，

$$\frac{2\pi}{\lambda}\frac{2x_0 d}{h}+2\pi f\left(\frac{L}{v_0+\mathit{\Delta} v}-\frac{L}{v_0}\right)=0 \qquad \therefore x_0=\frac{hL}{2d}\left(1-\frac{v_0}{v_0+\mathit{\Delta} v}\right)>0$$

と求まる．

以上より，「管 U_1 中の音波の伝播速さを v_0，管 U_2 中の音波の伝播速さを $v_0+\mathit{\Delta} v$ とする．はじめ O で観測されていた強め合いの条件は位相差 0 に該当するので，昇温後の位相差が 0 となる位置 x を計算すれば，

$$\frac{2\pi}{\lambda}\frac{2xd}{h}+2\pi f\left(\frac{L}{v_0+\mathit{\Delta} v}-\frac{L}{v_0}\right)=0 \qquad \therefore x=\frac{hL}{2d}\left(1-\frac{v_0}{v_0+\mathit{\Delta} v}\right)>0$$

となり，S_1 方向へずれることがわかる．」などと述べればよい．

(2) 管 U_1 中の音波の伝播速さを v_0，管 U_2 中の音波の伝播速さを $v_0+\mathit{\Delta} v$ とすると，位置 x_m における位相差は，

$$\mathit{\Delta}\phi=\frac{2\pi}{\lambda}\frac{2x_m d}{h}+2\pi f\left(\frac{L}{v_0+\mathit{\Delta} v}-\frac{L}{v_0}\right)$$

と求まる．$x_m=0$ で弱め合いとなる干渉条件は $\mathit{\Delta} v=D\mathit{\Delta} T$ より，

$$\frac{2\pi}{\lambda}\cdot 0+2\pi f\left(\frac{L}{v_0+D\mathit{\Delta} T}-\frac{L}{v_0}\right)=(2m+1)\pi$$

である．ここで，題意より昇温し始めて 1 回目の弱め合いより位相差が $\pm\pi$ となるときを考えれば

$$\begin{aligned}&2\pi f\left(\frac{L}{v_0+D\mathit{\Delta} T}-\frac{L}{v_0}\right)=\pm\pi\\ &\qquad\therefore \frac{2fDL}{v_0}\frac{\mathit{\Delta} T}{v_0+D\mathit{\Delta} T}=\mp 1\end{aligned}$$

となり，左辺正より右辺は $+1$ が適当である（位相差 $-\pi$ に相当）．よって，

$$\therefore \frac{2fDL}{v_0}\frac{\mathit{\Delta} T}{v_0+D\mathit{\Delta} T}=1 \qquad \therefore \mathit{\Delta} T=\frac{{v_0}^2}{D(2fL-v_0)}\,.$$