1 力学（エネルギー収支，仕事，単振動，力積）

【メモ】

・仕事の計算の分類：

$$W = \begin{cases} f\text{ が既知：} \begin{cases} f\text{ が一定：} \vec{f}\cdot\Delta\vec{x} \\ f\text{ が一定でない：} \displaystyle\int_{x_1}^{x_2} f\,dx \end{cases} \\ f\text{ が未知：エネルギー収支から逆算} \end{cases}$$

・等速円運動は以下 2 式の連立.

$$\begin{cases} \text{運動方程式（中心成分）} \\ \text{つりあい} \quad \leftarrow \quad \text{使わない場合もあり} \end{cases}$$

・力積の計算の分類：

$$\vec{I} = \begin{cases} f\text{ が既知} \begin{cases} f\text{ が一定：} |\vec{f}|\Delta t \\ f\text{ が一定でない：} \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} |\vec{f}|\,dx \end{cases} \\ f\text{ が未知：運動量収支から逆算} \begin{cases} \text{成分で計算} \\ \text{幾何的に計算} \end{cases} \end{cases}$$

【解答】

問 1 (1)　公式より $U = mg\cdot\dfrac{D^2}{2c}$ である.

(2)　物体と重力場からなる系の力学的エネルギーより，

$$\frac{1}{2}m{V_0}^2 = mg\frac{D^2}{2c} \qquad \therefore V_0 = D\sqrt{\frac{g}{c}}.$$

問 2 (1)　物体とばねからなる系の力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}kD^2 = \frac{1}{2}m{V_0}^2 \qquad \therefore k = m\left(\frac{V_0}{D}\right)^2.$$

(2)　$V_0 = D\sqrt{\dfrac{g}{c}}$ より $k = \dfrac{mg}{c}$ である.

(3)　運動方程式より

$$ma = -kx' \qquad \therefore a = -\frac{k}{m}x' = -\frac{g}{c}x'$$

と角振動数 $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = \sqrt{\dfrac{g}{c}}$，振動中心 $x' = 0$ の単振動とわかる．よって，初期条件から決まる未知定数 C_1，C_2 を用いて，

$$\begin{cases} x' = 0 + C_1 \sin\left(\sqrt{\dfrac{g}{c}}\,t\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{\dfrac{g}{c}}\,t\right), \\ v = C_1\sqrt{\dfrac{g}{c}}\cos\left(\sqrt{\dfrac{g}{c}}\,t\right) - C_2\sqrt{\dfrac{g}{c}}\sin\left(\sqrt{\dfrac{g}{c}}\,t\right) \end{cases}$$

と書ける．$t = 0$ で $x' = 0$，$v = D\sqrt{\dfrac{g}{c}}$ より，

$$\begin{cases} 0 = 0 + C_2\,, \\ D\sqrt{\dfrac{g}{c}} = C_1\sqrt{\dfrac{g}{c}} \end{cases} \qquad \therefore C_1 = D\,,\quad C_2 = 0$$

と求まり，

$$x' = D\sin\left(\sqrt{\frac{g}{c}}\,t\right) = \underset{\sim\sim\sim}{D\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)}\,.$$

(4)　単振動の半周期を考えればよい．よって，

$$t = \frac{\pi}{\omega} = \underset{\sim\sim\sim}{\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}\,.$$

(5)　物体の運動量収支を考えて，

$$|I| = |\varDelta p| = |m(-V_0) - mV_0| = \underset{\sim\sim\sim}{2mV_0}\,.$$

問 3 (1)　仕事の定義より，

$$W = \begin{pmatrix} -\mu' mg \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix} = \underset{\sim\sim\sim}{-\mu' mgD}\,.$$

(2)　物体のエネルギー収支より，

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mV'^2 - \frac{1}{2}m{V_0}^2 &= \begin{pmatrix} -\mu' mg \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu' mg \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -D \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= -2\mu' mgD \\ \therefore V' &= \underset{\sim\sim\sim}{\sqrt{{V_0}^2 - 4\mu' gD}}\,. \end{aligned}$$

(3)　題意より，

$$-\sqrt{{V_0}^2 - 4\mu' gD} - 0 = -\frac{3}{5}(V_0 - 0) \qquad \therefore \mu' = \frac{4}{25}\frac{{V_0}^2}{gD} = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{4}{25}\frac{D}{c}}\,.$$

問 4 (1) 運動方程式は，

$$\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{ma = -kx' - \mu' mg}\,.$$

(2) 物体のエネルギー収支より，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}m\cdot 0^2 - \frac{1}{2}m{V_0}^2 &= \int_0^{\frac{4}{5}D} (-kx' - \mu' mg)\,dx \\ &= -\frac{1}{2}k\left(\frac{4}{5}D\right)^2 - \frac{4}{5}\mu' mgD\end{aligned}$$

$$\therefore \mu' = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{5}{8}\frac{{V_0}^2}{gD} - \frac{2}{5}\frac{kD}{mg}}\,.$$

(3) $k = \dfrac{mg}{c}$，$V_0 = D\sqrt{\dfrac{g}{c}}$ より，

$$\mu' = \frac{5}{8}\frac{\frac{g}{c}D^2}{gD} - \frac{2}{5}\frac{\frac{mg}{c}\cdot D}{mg} = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{9}{40}\frac{D}{c}}\,.$$

2 電磁気（電気回路，交流回路）

【メモ】

・電気回路の状態決定は以下の 3 種類の式で一意に決まる．

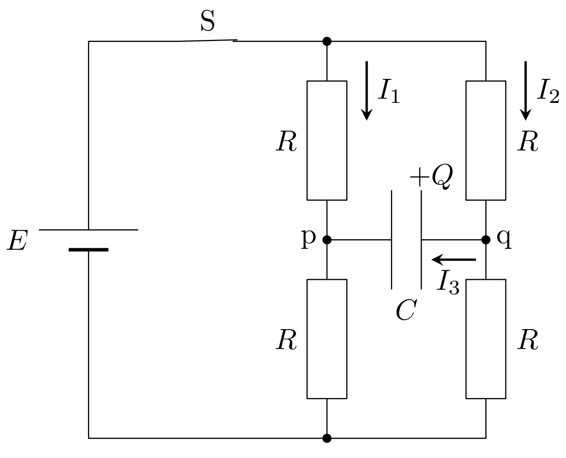
$$\begin{cases} \text{キルヒホッフ第 2 法則} \\ \text{電荷保存則（キルヒホッフ第 1 法則も含む）} \\ \text{素子の性質} \end{cases}$$

性質を暗記しない素子（電球やダイオードなど）については，問題文でその性質が与えられる．

・交流回路でかつ異種素子が 2 つ以上直列となっているときは，例外的にキルヒホッフの法則に $I = I_0 \sin(\omega t + \theta)$ のように仮定した解を代入し，任意の時刻 t で両辺が等しくなるよう I_0，θ を求め，I を求める．

【解答】

問 1　左上の抵抗を図の上から下向きに流れる電流を I_1，右上の抵抗を図の上から下向きに流れる電流を I_2，コンデンサに $\mathrm{q} \to \mathrm{p}$ と流れる電流を I_3，コンデンサの q 側の極板に帯電している電荷を Q とする（以下の図参照）．



このとき，キルヒホッフの法則は以下のようになる．

$$\begin{cases} E - RI_1 - R(I_1 + I_3) = 0\,, \\ E - RI_2 - R(I_2 - I_3) = 0\,, \\ -RI_2 - \dfrac{Q}{C} + RI_1 = 0\,. \end{cases}$$

さて，十分時間経過後 $I_3 = 0$ となる．よって，十分時間経過後の各未知量はキルヒホッフの法

則より

$$\begin{cases} E-2RI_1=0\,, \\ E-2RI_2=0\,, \\ -RI_2-\dfrac{Q}{C}+RI_1=0 \end{cases} \qquad \therefore I_1=I_2=\frac{E}{2R} \quad Q=0$$

と求まる．

(1)　$I_1=\dfrac{E}{2R}$，$I_3=0$ より，

$$\phi_{\mathrm{p}}=+R(I_1+I_3)=\frac{E}{2}\,.$$

(2)　$I_2=\dfrac{E}{2R}$，$I_3=0$ より，

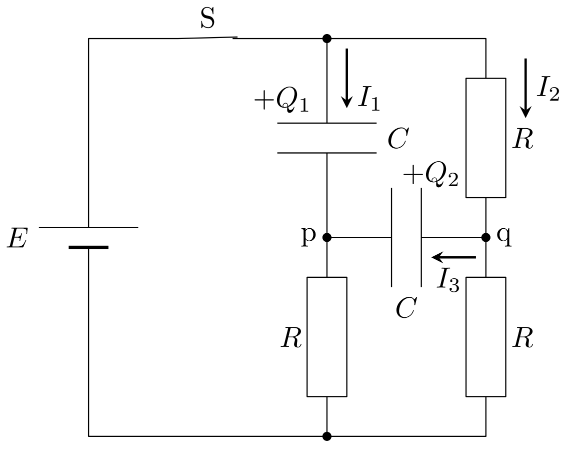
$$\phi_{\mathrm{q}}=+R(I_2-I_3)=\frac{E}{2}\,.$$

(3)　$Q=0$ である．

(4)　$Q=0$ より

$$U=\frac{Q^2}{2C}=0\,.$$

問 2　左上のコンデンサを図の上から下向きに流れる電流を I_1，右上の抵抗を図の上から下向きに流れる電流を I_2，コンデンサに q → p と流れる電流を I_3，左上のコンデンサの上側極板の帯電量を Q_1，中央のコンデンサの q 側の極板に帯電している電荷を Q_2 とする（以下の図参照）．



このとき，キルヒホッフの法則は以下のようになる．

$$\begin{cases} E-\dfrac{Q_1}{C}-R(I_1+I_3)=0\,, \\ E-RI_2-R(I_2-I_3)=0\,, \\ -RI_2-\dfrac{Q_2}{C}+\dfrac{Q_1}{C}=0\,. \end{cases}$$

さて，十分時間経過後 $I_1 = I_3 = 0$ となる．よって，十分時間経過後の各未知量はキルヒホッフの法則より

$$\begin{cases} E - \dfrac{Q_1}{C} = 0\,, \\ E - 2RI_2 = 0\,, \\ -RI_2 - \dfrac{Q_1}{C} + \dfrac{Q_2}{C} = 0 \end{cases} \qquad \therefore I_2 = \frac{E}{2R} \quad Q_1 = CE\,, \quad Q_2 = \frac{1}{2}CE\,.$$

と求まる．

(1)　$I_1 = 0$，$I_3 = 0$ より，

$$\phi_{\mathrm{p}} = +R(I_1 + I_3) = \underset{\sim}{0}\,.$$

(2)　$I_2 = \dfrac{E}{2R}$，$I_3 = 0$ より，

$$\phi_{\mathrm{q}} = +R(I_2 - I_3) = \underset{\sim\sim}{\frac{E}{2}}\,.$$

(3)　$Q_2 = \underset{\sim\sim\sim}{\dfrac{1}{2}CE}$ である．

(4)　$Q_2 = \dfrac{1}{2}CE$ より

$$U = \frac{{Q_2}^2}{2C} = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{1}{8}CE^2}\,.$$

問 3 (1)　題意より a → p → b に流れる電流を $I_1 = I_0 \sin(\omega t - \delta)$ と置く．コンデンサ側にある抵抗にかかる電圧（b に対する p の電位）は，

$$V_1 = RI_1 = \underset{\sim\sim}{RI_0} \sin(\omega t - \delta)\,.$$

(2)　コンデンサの上側極板に帯電する電荷を Q とすると，コンデンサに流れ込む電流 I_1 と Q の間には $I_1 = +\dfrac{dQ}{dt}$ の関係がある．よって，Q は，

$$Q = \int I_1\,dt = \int I_0 \sin(\omega t - \delta)\,dt = -\frac{I_0}{\omega}\cos(\omega t - \delta)$$

と書ける．よって，コンデンサにかかる電圧（p に対する a の電位）は[*1]，

$$V_{\mathrm{C}} = +\frac{Q}{C} = -\underset{\sim\sim}{\frac{I_0}{C\omega}}\cos(\omega t - \delta)\,.$$

*1 コンデンサのリアクタンスが $\dfrac{1}{C\omega}$ であることから公式的に求めてもよい．

(3) 以上の V_1，V_C をベクトルとして問題図 5 のように図示すれば，

$$\left|\vec{V}_1+\vec{V}_\mathrm{C}\right|=\sqrt{\left|\vec{V}_1\right|^2+\left|\vec{V}_\mathrm{C}\right|^2}=I_0\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{C\omega}\right)^2}\,.$$

(4) 図 5 より，

$$\tan\theta=\frac{\left|\vec{V}_\mathrm{C}\right|}{\left|\vec{V}_1\right|}=\frac{1}{RC\omega}\,.$$

(5) キルヒホッフの法則より，$2\left|\vec{V}_2\right|=2E_0$ である．よって，図 6 より，

$$\left|\vec{V}\right|=\left|\vec{V}_2\right|=\frac{E_0}{2}\,.$$

(6) 図 6 より，

$$\phi=2\theta\,.$$

【補足】交流回路・基本に忠実に

問 3 (1) 題意より a → p → b に流れる電流を $I_1 = I_0 \sin(\omega t - \delta)$ と置く．コンデンサ側にある抵抗にかかる電圧（b に対する p の電位）は，

$$V_1 = RI_1 = RI_0 \sin(\omega t - \delta)\,.$$

(2) コンデンサの上側極板に帯電する電荷を Q とすると，コンデンサに流れ込む電流 I_1 と Q の間には $I_1 = +\dfrac{dQ}{dt}$ の関係がある．よって，Q は，

$$Q = \int I_1\,dt = \int I_0 \sin(\omega t - \delta)\,dt = -\frac{I_0}{\omega}\cos(\omega t - \delta)$$

と書ける．よって，コンデンサにかかる電圧（p に対する a の電位）は[*2]，

$$V_{\mathrm{C}} = +\frac{Q}{C} = -\frac{I_0}{C\omega}\cos(\omega t - \delta)\,.$$

(3) キルヒホッフの法則より，

$$0 = E_0 \sin(\omega t) - RI_1 - \frac{Q}{C}$$
$$\therefore E_0 \sin(\omega t) = I_0\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2}\,\sin(\omega t - \delta - \theta) \qquad \cdots\cdots ①$$

と書ける．ここで $\tan\theta = \dfrac{1}{RC\omega}$ である．

(4) 任意の時刻 t で①の両辺が等しくなるためには，

$$\begin{cases} E_0 = I_0\sqrt{R^2 + \left(\dfrac{1}{C\omega}\right)^2}, \\ 0 = -\delta - \alpha \end{cases} \qquad \therefore I_0 = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \left(\dfrac{1}{C\omega}\right)^2}}, \quad \delta = -\theta$$

とならなければならない．よって，I_1 は，

$$I_1 = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \left(\dfrac{1}{C\omega}\right)^2}}\sin(\omega t + \theta) \quad \left(\text{ただし} \tan\theta = \frac{1}{RC\omega}\right)$$

と書ける．以上から V_1 は，

$$V_1 = RI_1 = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\dfrac{1}{C\omega}\right)^2}}E_0 \sin(\omega t + \theta)$$

[*2] コンデンサのリアクタンスが $\dfrac{1}{C\omega}$ であることから公式的に求めてもよい．

と書け，電源電圧の電圧 $E_0\sin(\omega t)\,(=V_1+V_{\mathrm{C}})$ に対して θ だけ位相が進んでいる．この正接は上記計算より $\tan\theta=\dfrac{1}{RC\omega}$ である．

(5)　抵抗 2 つからなる側に流れる電流を I_2 とすると，キルヒホッフの法則より，

$$E_0\sin(\omega t)-2RI_2=0 \qquad \therefore I_2=\frac{E}{2R}\sin(\omega t)$$

と求まる．よって，q の電位は

$$\phi_{\mathrm{q}}=+RI_2=\frac{E_0}{2}\sin(\omega t)$$

と求まる．p の電位も同様に，

$$\phi_{\mathrm{p}}=+RI_1=\frac{R}{\sqrt{R^2+\left(\dfrac{1}{C\omega}\right)^2}}E_0\sin(\omega t+\theta)$$

と求まる．以上より，q に対する p の電位は，

$$\begin{aligned}
\phi_{\mathrm{q}\to\mathrm{p}}&=\phi_{\mathrm{p}}-\phi_{\mathrm{q}}\\
&=\frac{R}{\sqrt{R^2+\left(\dfrac{1}{C\omega}\right)^2}}E_0\sin(\omega t+\theta)-\frac{E_0}{2}\sin(\omega t)\\
&=\frac{R}{\sqrt{R^2+\left(\dfrac{1}{C\omega}\right)^2}}\frac{R}{\sqrt{R^2+\left(\dfrac{1}{C\omega}\right)^2}}E_0\sin(\omega t)\\
&\quad+\frac{R}{\sqrt{R^2+\left(\dfrac{1}{C\omega}\right)^2}}\frac{\dfrac{1}{C\omega}}{\sqrt{R^2+\left(\dfrac{1}{C\omega}\right)^2}}E_0\cos(\omega t)-\frac{E_0}{2}\sin(\omega t)\\
&=\left\{\frac{R^2}{R^2+\left(\dfrac{1}{C\omega}\right)^2}-\frac{1}{2}\right\}E_0\sin(\omega t)+\frac{\dfrac{R}{C\omega}}{R^2+\left(\dfrac{1}{C\omega}\right)^2}E_0\cos(\omega t)\\
&=\frac{R^2-\left(\dfrac{1}{C\omega}\right)^2}{R^2+\left(\dfrac{1}{C\omega}\right)^2}\frac{E_0}{2}\sin(\omega t)+\frac{\dfrac{R}{C\omega}}{R^2+\left(\dfrac{1}{C\omega}\right)^2}E_0\cos(\omega t)\\
&=\frac{E_0}{2}\frac{1}{R^2+\left(\dfrac{1}{C\omega}\right)^2}\sqrt{\left\{R^2-\left(\dfrac{1}{C\omega}\right)^2\right\}^2+\left(\dfrac{2R}{C\omega}\right)^2}\,\sin(\omega t+\phi)\\
&=\frac{E_0}{2}\sin(\omega t+\phi)
\end{aligned}$$

と書ける．ここで $\tan\phi = \dfrac{\dfrac{2R}{C\omega}}{R^2 - \left(\dfrac{1}{C\omega}\right)^2}$ である．

(6)　前述の $\tan\phi$ を整理して，

$$
\begin{aligned}
\tan\phi &= \frac{\dfrac{2R}{C\omega}}{R^2 - \left(\dfrac{1}{C\omega}\right)^2} \\
&= \frac{2\dfrac{R}{\sqrt{R^2+(1/C\omega)^2}} \cdot \dfrac{1/C\omega}{\sqrt{R^2+(1/C\omega)^2}}}{\left(\dfrac{R}{\sqrt{R^2+(1/C\omega)^2}}\right)^2 - \left(\dfrac{1/C\omega}{\sqrt{R^2+(1/C\omega)^2}}\right)^2} \\
&= \frac{\sin(2\theta)}{\cos(2\theta)} \\
&= \tan(2\theta)
\end{aligned}
$$

$$\therefore \phi = \utilde{2\theta}\,.$$

3 熱力学（力学装置のない熱機関）

【メモ】

・今回は具体的な力学装置が与えられていないので，可動部分のつりあいから圧力の決定を行うことができない．そのため，気体の状態決定は状態方程式，ポアソンの公式から行う．

・熱力学の基本的（むらがなく熱あり）な過程の定石は以下の通り．

$$\begin{cases} \text{状態決定：}\begin{cases} \text{可動部分のつりあい} & \rightarrow \quad \text{圧力 } P \text{ の決定} \\ \text{状態方程式} & \rightarrow \quad \text{温度 } T \text{ の決定（モル数 } n \text{ の場合も）} \end{cases} \\ \text{第 1 法則：熱の決定式} \end{cases}$$

熱力学第 1 法則は熱の決定式で，内部エネルギー変化は公式，気体のする仕事は $P-V$ 図の面積評価によって行う．

・むらのない断熱過程の定石は以下の通り．

$$\begin{cases} \text{状態決定：}\begin{cases} \text{ポアソンの公式} \\ \text{状態方程式} \end{cases} \\ \text{第 1 法則：仕事の決定式} \end{cases}$$

断熱過程ゆえ熱力学第 1 法則は熱の決定式ではなくなる．内部エネルギー変化を公式から計算し，気体のする仕事を熱力学第 1 法則を通じて間接的に求めることとなる．

【解答】

問 1　熱力学第 1 法則より $Q = \mathit{\Delta} U + W$ である．

問 2　ざっくり，右方向・上方向の過程が吸熱過程であり，温度が上昇する．

(1)　A → B.

(2)　C → D.

(3)　A → B，B → C.

(4)　D → A.

(5)　A → B，D → A.

(6)　B → C，C → D.

問 3　状態方程式より $p_{\mathrm{A}} = \dfrac{nRT_{\mathrm{A}}}{V_{\mathrm{A}}}$ と書ける．

問 4　状態方程式より，

$$\begin{cases} \mathrm{A}: p_{\mathrm{A}}V_{\mathrm{A}} = nRT_{\mathrm{A}}\,, \\ \mathrm{B}: p_{\mathrm{A}} \cdot 3V_{\mathrm{A}} = nRT_{\mathrm{B}} \end{cases} \qquad \therefore T_{\mathrm{B}} = 3T_{\mathrm{A}}\,.$$

問 5　内部エネルギー変化は公式より，

$$\Delta U_{\mathrm{AB}} = \frac{3}{2}nR(3T_{\mathrm{A}} - T_{\mathrm{A}}) = 3nRT_{\mathrm{A}}\,.$$

仕事は pV 図より，

$$W_{\mathrm{AB}} = p_{\mathrm{A}}(3V_{\mathrm{A}} - V_{\mathrm{A}}) = 2p_{\mathrm{A}}V_{\mathrm{A}} = 2nRT_{\mathrm{A}}\,.$$

問 6　熱力学第 1 法則より，

$$Q_{\mathrm{AB}} = \Delta U_{\mathrm{AB}} + W_{\mathrm{AB}} = 5nRT_{\mathrm{A}}\,.$$

問 7　断熱過程ゆえ $Q_{\mathrm{BC}} = 0$ である．よって，過程 B → C の仕事は熱力学第 1 法則より，

$$W_{\mathrm{BC}} = -\Delta U_{\mathrm{BC}} = -\frac{3}{2}nR(T_{\mathrm{C}} - T_{\mathrm{A}})\,.$$

問 8　定積過程ゆえ $W_{\mathrm{CD}} = 0$ である．よって，過程 C → D の放熱量は熱力学第 1 法則より，

$$Q'_{\mathrm{CD}} = -Q_{\mathrm{CD}} = -\Delta U_{\mathrm{CD}} = -\frac{3}{2}nR(T_{\mathrm{D}} - T_{\mathrm{C}})\,.$$

問 9　各過程における仕事の総和を計算して，

$$\begin{aligned} W_{\mathrm{cyc}} &= W_{\mathrm{AB}} + W_{\mathrm{BC}} + W_{\mathrm{CD}} + W_{\mathrm{DA}} \\ &= 2nRT_{\mathrm{A}} + \left\{-\frac{3}{2}nR(T_{\mathrm{C}} - 3T_{\mathrm{A}})\right\} + 0 + \left\{-\frac{3}{2}nR(T_{\mathrm{C}} - 3T_{\mathrm{A}})\right\} \\ &= \frac{1}{2}nR(10T_{\mathrm{A}} - 3T_{\mathrm{C}} + 3T_{\mathrm{D}})\,. \end{aligned}$$

問 10　熱効率の定義より，

$$e = \frac{W_{\mathrm{cyc}}}{Q_{吸}} = \frac{\frac{1}{2}nR(10T_{\mathrm{A}} - 3T_{\mathrm{C}} + 3T_{\mathrm{D}})}{5nRT_{\mathrm{A}}} = \frac{1}{10}\left(1 - 3\frac{T_{\mathrm{C}} - T_{\mathrm{D}}}{T_{\mathrm{A}}}\right).$$