1 水平面上に質量 $3m$ の台を置く．台の上面は，水平面 AB と，点 O を中心とする半径 r の円の 4 分の 1 の円筒面 BC（$\angle \mathrm{BOC} = 90^\circ$）が点 B でなめらかにつながったものとなっている．重力加速度の大きさを g として，以下の問に答えよ．ただし，小球と台，台と水平面の間の摩擦は無視でき，小球と台の運動は紙面を含む鉛直面内に限られ，台が傾くことはないものとする．

図 1 のように，台を水平面上にストッパーで固定し，質量 m の小球を AB 部分に置き，右向きに初速を与えると，小球は AB 部分を速さ v で運動し，円筒面 BC 部分のある点 D に達して引き返した．

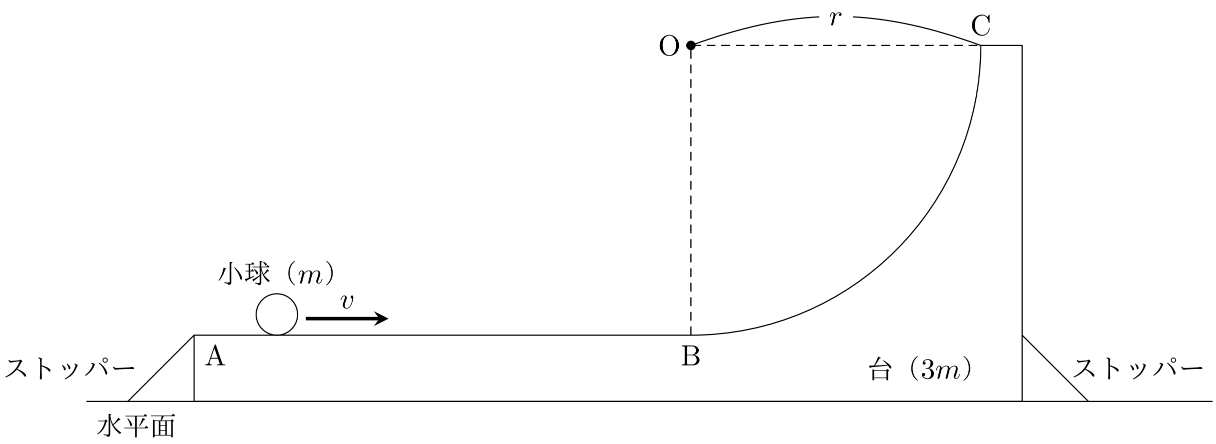


図 1 － 1

問 1　小球が台の上面 AB 部分を運動しているとき，小球の運動量の大きさと運動エネルギーをそれぞれ求めよ．

問 2　点 D の AB 面からの高さを求めよ．

図 1 － 2 のように，ストッパーを取り除いて台の固定を外し，台が静止している状態で質量 m の小球を台の上面 AB 部分に置き，右向きの初速を与えると，台は静止したまま，小球は AB 部分を速さ v で運動し，小球が点 B を通過すると，台は右向きに動きはじめた．その後，小球は円筒面 BC 部分のある点 E に達して引き返し，再び点 B を通過した．

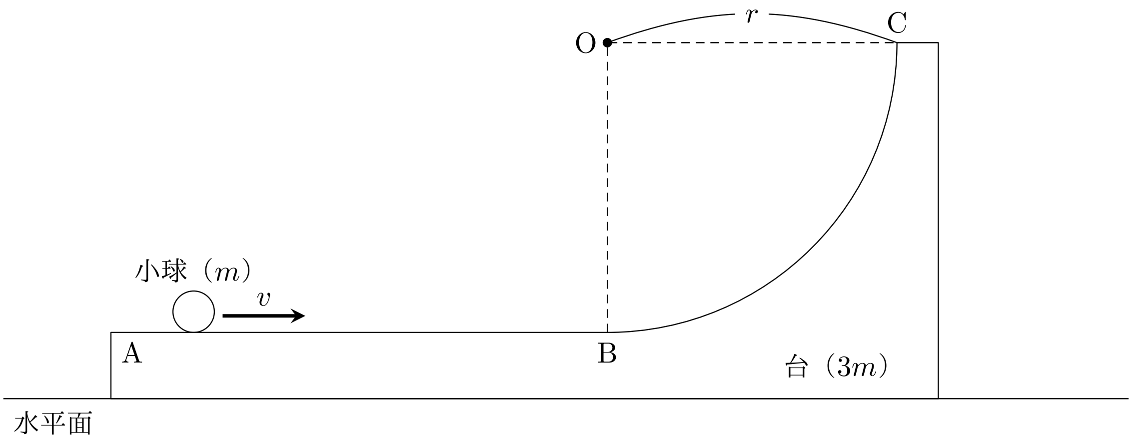


図１－２

問３　小球が点 E に達したとき，台と小球は同じ速度になる．台と小球を合わせた物体系についての運動量保存則を用いて，小球が点 E に達したときの台の速さを求めよ．

問４　台と小球を合わせた物体系についての力学的エネルギー保存則を用いて，点 E の AB 面からの高さを求めよ．

問５　小球が点 E で引き返し，再び台の上面 AB 部分に戻ってきたときの台の速さを求めよ．

図１－３のように，ストッパーを取り除いて台の固定を外し，台が静止している状態で質量 m の小球を台の上面 AB 部分に置き，右向きの初速を与えると，台は静止したまま，小球は AB 部分を速さ $2\sqrt{gr}$ で運動し，小球が点 B を通過すると，台は右向きに動きはじめた．その後，小球は点 C を通過して台から上方に飛び出した．

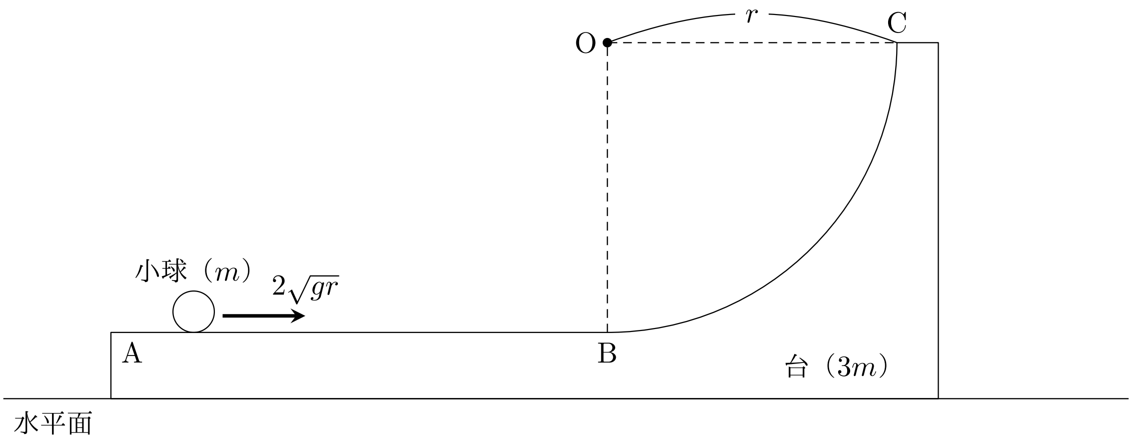


図１－３

問６　小球が点 C を飛び出すときの台の速さと小球の速さをそれぞれ求めよ．

問７　小球が点 B を通過後，点 C を飛び出すまでの間に小球にはたらくすべての力から小球が受けた力積の大きさを求めよ．

問８　飛び出した小球が再び台の上面 AB 部分に戻ってきたときの台の速さを求めよ．

2 なめらかに動くピストンを備えた断面積 S のシリンダーが，大気中で水平面に固定されている．ピストンとシリンダーは断熱材で作られており，シリンダーの底面には体積が無視できる熱交換器が取りつけられている．また，シリンダー内にはストッパーがあり，シリンダーの底面からピストンまでの距離は a を超えることはない．大気圧を p_0，気体定数を R として，以下の問に答えよ．

図２－１のように，シリンダー内に 1 mol の単原子分子理想気体（以下，単に気体と呼ぶ）を圧力が $p_1\,(p_1 > p_0)$ になるように封入すると，シリンダーの底面からピストンまでの距離が a となり，ピストンはストッパーに接した．この時のシリンダー内の気体の状態を状態１とする．

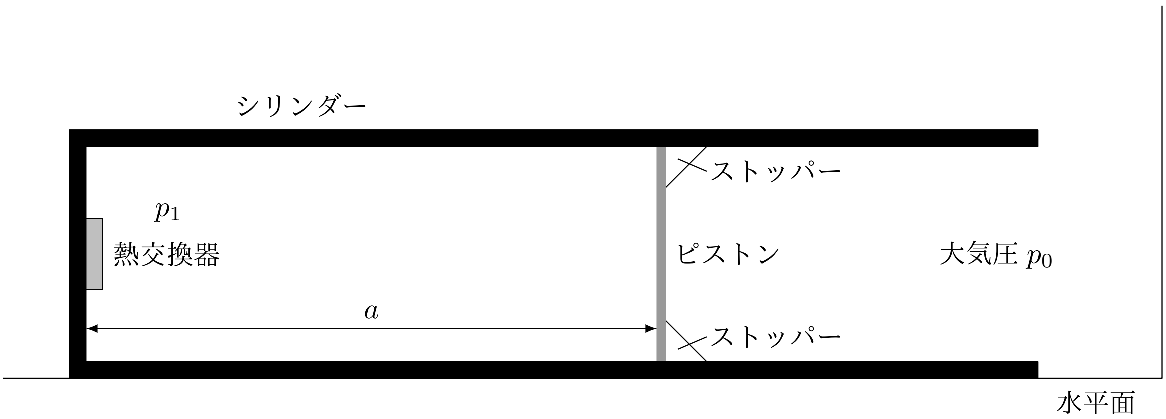


図２－１

問１　状態１における気体の温度（絶対温度）を求めよ．

状態１のシリンダー内の気体を熱交換器でゆっくりと冷却していくと，ピストンがストッパーから離れはじめた．このときのシリンダー内の気体の状態を状態２とする．

問２　ピストンがストッパーから受ける力が０になることより，状態２における気体の圧力を求めよ．

問３　状態２における気体の温度（絶対温度）を求めよ．

問４　状態１から状態２への過程で気体が放出した熱量を求めよ．

ピストンがストッパーから離れはじめた後も，シリンダー内の気体を熱交換器でゆっくり冷却し，しば

らくしてから冷却を止めると，図２－２のように，ピストンはシリンダーの底面からの距離 $b\,(b < a)$ となる位置まで移動して静止していた．このときのシリンダー内の気体の状態を状態３とする．

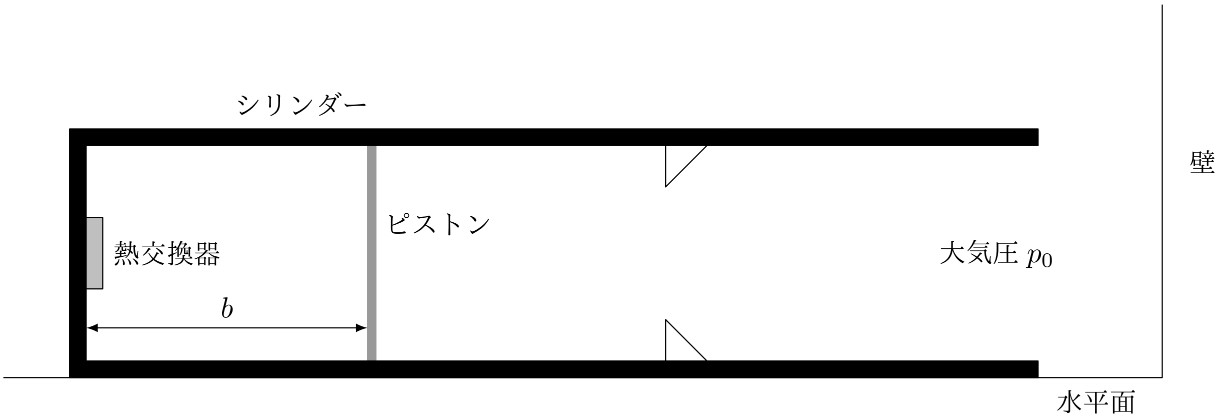


図２－２

問５　状態２から状態３への過程で気体がピストンからされた仕事を求めよ．

問６　状態２から状態３への過程で気体がした仕事を求めよ．

図２－３のように，気体が状態３の状態で，静止しているピストンにばねの一端を取付，ばねの他端を壁に固定すると，ばねは水平で自然長であった．この状態から，シリンダー内の気体を熱交換器でゆっくり加熱し，図２－４のように，シリンダーの底面からピストンまでの距離が a となる位置に，ピストンが達した直後に加熱を止めた．このときピストンがストッパーから受ける力は０で，シリンダー内の気体の状態は，圧力が p_1 の状態１に戻っていた．ただし，ばねは軽くてたわむことなく水平方向にのみ縮むものとする．

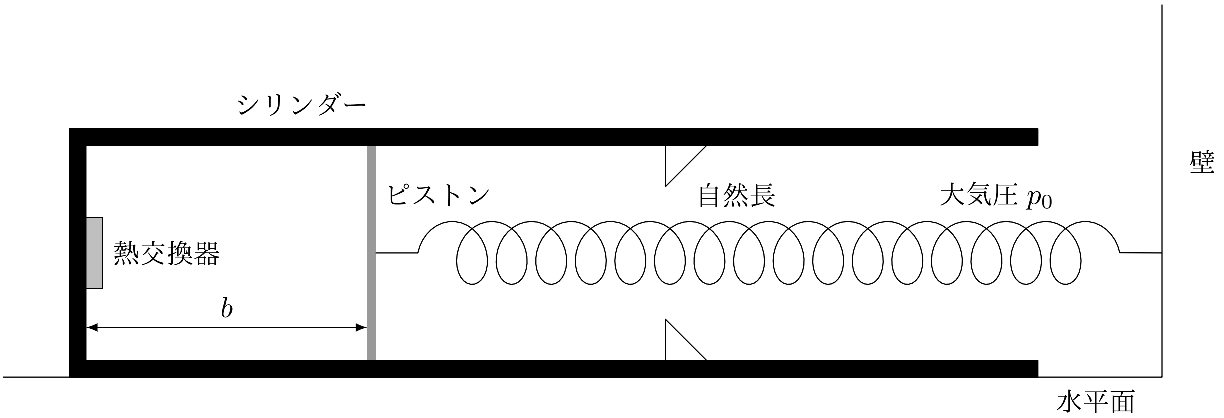


図２－３

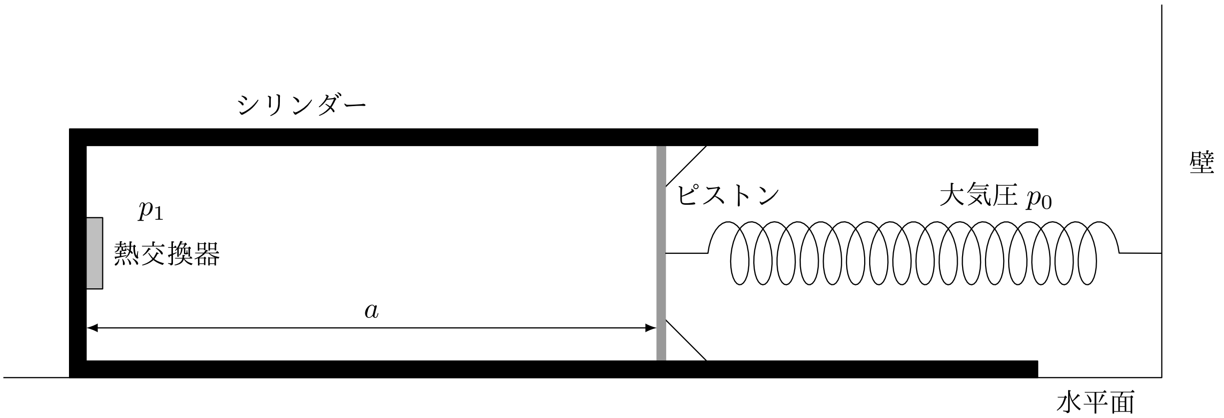


図２－４

問７　状態 3 から状態 1 への過程で気体がした仕事を求めよ．

問８　状態 3 から状態 1 への過程で気体が吸収した熱量を求めよ．

問９　図２－３の状況で縮んだばねを取り除くと図２－１の状態になり，シリンダー内の気体は状態 1 に戻った．状態 1 から状態 2，状態 3 を経て状態 1 に戻る 1 サイクルにおける熱効率を求めよ．

3 図３－１のように，起電力 E の電池 $\mathrm{E_1}$，起電力を変えられる可変電源 $\mathrm{E_2}$，抵抗値がともに R の抵抗 $\mathrm{R_1}$，$\mathrm{R_2}$，電気容量がそれぞれ C，$2C$ のコンデンサー $\mathrm{C_1}$，$\mathrm{C_2}$，およびスイッチ $\mathrm{S_1}$，$\mathrm{S_2}$ を用いた回路がある．はじめ，スイッチ $\mathrm{S_1}$，$\mathrm{S_2}$ は開いていて，コンデンサー $\mathrm{C_1}$，$\mathrm{C_2}$ に電荷は蓄えられていない．電池 $\mathrm{E_1}$ と可変電源 $\mathrm{E_2}$ の内部抵抗は無視できるものとして，以下の問に答えよ．

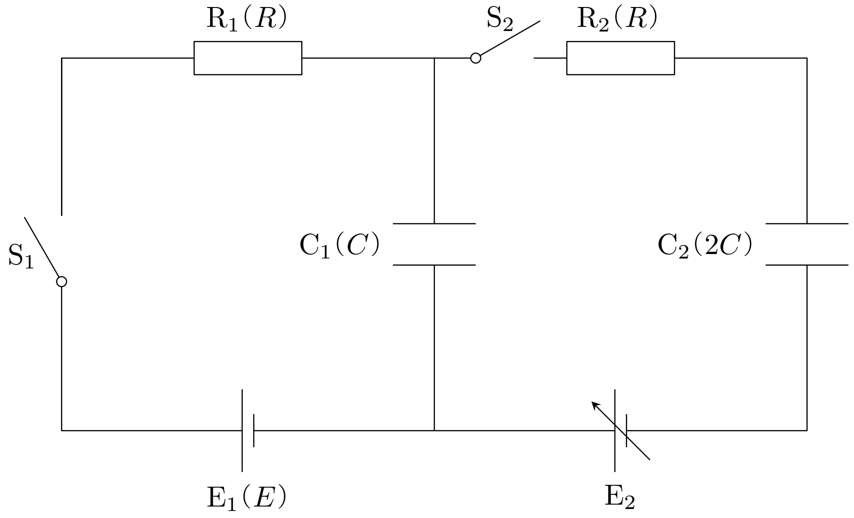


図３－１

問１　次の文章の空欄 (ア) ～ (オ) に入る適切な式を答えよ

スイッチ $\mathrm{S_1}$ を閉じる．その直後，コンデンサー $\mathrm{C_1}$ の両端の電位差（電圧）は 0 であるので，抵抗 $\mathrm{R_1}$ に流れる電流の大きさは (ア) である．十分に時間が経過したときは，抵抗 $\mathrm{R_1}$ に流れる電流が 0 になるので，コンデンサー $\mathrm{C_1}$ に蓄えられている電気量の大きさは (イ) であり，静電エネルギーは (ウ) である．スイッチ $\mathrm{S_1}$ を閉じてから十分に時間が経過するまでの間に，電池 $\mathrm{E_1}$ がした仕事は (エ) であり，抵抗 $\mathrm{R_1}$ で発生したジュール熱は (オ) である．

スイッチ $\mathrm{S_1}$ を閉じてから十分に時間が経過した後に $\mathrm{S_1}$ を開く．その後，可変電源 $\mathrm{E_2}$ の電圧を一定値 E に値を保ち続けながらスイッチ $\mathrm{S_2}$ を閉じる．

問２　スイッチ $\mathrm{S_2}$ を閉じた直後に抵抗 $\mathrm{R_2}$ に流れる電流の大きさ I_0 を E，R を用いて表せ．

問３　スイッチ $\mathrm{S_2}$ を閉じてから十分に時間が経過したときに，コンデンサー $\mathrm{C_2}$ の上側の極板に蓄えられている電気量，およびコンデンサー $\mathrm{C_1}$ の上側の極板に蓄えられている電気量を求めよ．答の

みでなく，式・説明も記せ.

問 4　スイッチ S_2 を閉じた時刻を $t = 0$ とする．抵抗 R_2 に流れる電流の大きさと時刻の関係を表すグラフの概形を描け.

コンデンサー C_1，C_2 に電荷が蓄えられていないはじめの状態から，スイッチ S_1 を閉じ，十分に時間が経過した後にスイッチ S_2 スイッチを開く．時刻 0 でスイッチ S_2 を閉じ，可変電源 E_2 の電圧の値を E から適切に変化させると，S_2 を閉じた後のある時刻 t における抵抗 R_2 に流れる電流の大きさが，ある値 i_0 から図 3 − 2 のように直線的に変化し，時刻 $t = t_1$ で $i = 0$ となった．以下では，$0 < t \leq t_1$ について考える.

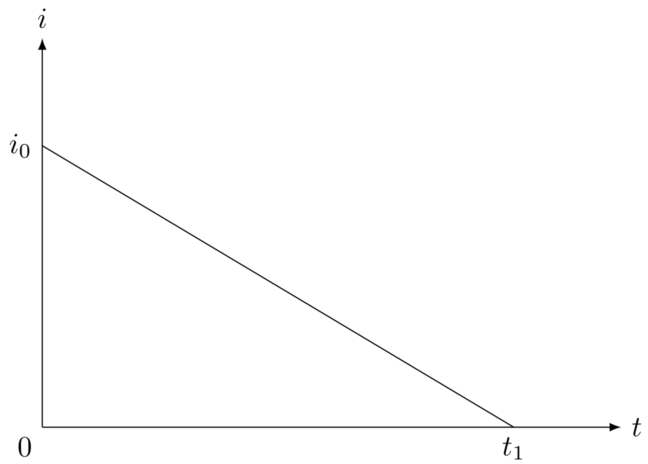


図 3 − 2

問 5　抵抗 R_2 に流れる電流の大きさ i を，時刻 t の関数として求めよ．ただし，i_0 は用いず E，R，t_1，t を用いて求めること.

問 6　コンデンサー C_2 の上側の極板に蓄えられている電気量を，時刻 t の関数として求めよ．ただし，i_0 は用いず E，R，t_1，t を用いて求めること.

問 7　可変電源 E_2 の電圧を，時刻 t の関数として求めよ．ただし，i_0 は用いず E，R，C，t_1，t を用いて求めること.

1 非等速円運動，複数物体系，束縛条件

【メモ】

・複数物体系ゆえ，保存則の連立が基本となる．

・問 3 と問 4，問 5，問 6，問 7，問 8 は全て同じ問題設定．ただし，問 6 以降は束縛条件を明示的に取り扱う必要がある．

・問 7 は力積の計算を含んでいるが，力積の計算は次の通り行う．

$$\vec{I}=\begin{cases}\cdot\text{力}\vec{f}\text{の具体的な形が既知} \quad \to \quad \text{定義から直接計算}\\ \quad \to \quad \begin{cases}\vec{f}\text{一定の場合：}\vec{f}\Delta t\\ f\text{ が一定出ない場合：（}\vec{f}\text{の } t \text{ 積分）＝（}f-t\text{ グラフの面積）}\end{cases}\\ \cdot\text{力}\vec{f}\text{の具体的な形が不明} \quad \to \quad \text{運動量収支から逆算}\end{cases}$$

今回は，垂直抗力の詳細が不明のため，運動量収支から求めるほかない，ということになる．

【解答】

問 1　運動量 p，および運動エネルギー K はそれぞれ公式より，

$$p=mv\,,\quad K=\frac{1}{2}mv^2\,.$$

問 2　小球と重力場からなる系の力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}m\cdot 0^2+mgh=\frac{1}{2}mv^2+mg\cdot 0\,,\qquad \therefore h=\frac{v^2}{2g}\,.$$

問 3　以降，水平右向きに x 軸，鉛直上向きに y 軸を定める．x 方向の相対的な位置が極値を取ることから，x 方向の相対速度は 0 となる．運動量（x 成分），および小球，台，重力場からなる系の力学的エネルギー保存則より，

$$\begin{cases}mu+3mV=mv\,,\\ \dfrac{1}{2}mu^2+\dfrac{1}{2}3mV^2+mgh=\dfrac{1}{2}mv^2\,,\\ u-V=0\,,\end{cases}\qquad \therefore u=V=\frac{1}{4}v\,,\quad h=\frac{3v^2}{8g}\,.$$

問 4　問 3 に示した．

問 5　運動量（x 成分），および小球，台，重力場からなる系の力学的エネルギー保存則より，

$$\begin{cases}mu+3mV=mv\,,\\ \dfrac{1}{2}mu^2+\dfrac{1}{2}3mV^2=\dfrac{1}{2}mv^2\,,\\ u-V=0\,,\end{cases}\qquad \therefore V=\frac{1}{2}v\,,\quad u=-\frac{1}{2}v\,.$$

問６　小球が BC 面上にあるとき位置を点 P としたとき，$\angle\mathrm{BOP} = \theta$ とし，このときの台の速度を $(V, 0)$，小球の速度を (u_x, u_y) とする．運動量（x 成分），小球，台，重力場からなる系の力学的エネルギー保存則，および束縛条件は，

$$
\begin{cases}
mu + 3mV = 2m\sqrt{gr}\,, \\
\dfrac{1}{2}m({v_x}^2 + v_y) + \dfrac{1}{2}3mV^2 - mgr\cos\theta = mgr\,, \\
v_y = r\dot{\theta}\sin\theta\,, \\
v_x - V = r\dot{\theta}\cos\theta\,.
\end{cases}
$$

さて，束縛条件より $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ で $v_x = V$ より，

$$
v_x = V = \frac{1}{2}\sqrt{gr}\,,\quad v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} = \frac{\sqrt{5gr}}{2}\,.
$$

問７　問 6 より，C での小球の速度 $\vec{v}_{\mathrm{C}}$ は，

$$
\vec{v}_{\mathrm{C}} = \sqrt{gr}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}
$$

よって，運動量収支より，

$$
\vec{I} = m\vec{v}_{\mathrm{C}} - m\vec{v}_{\mathrm{B}} = m\sqrt{gr}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} - m\sqrt{gr}\begin{pmatrix} 20 \end{pmatrix} = m\sqrt{gr}\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\,,
$$

$$
\therefore |\vec{I}| = m\sqrt{gr}\sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 1} = \frac{m\sqrt{13gr}}{2}\,.
$$

問８　$\theta = 0$ を考えて，

$$
\begin{cases}
mu + 3mV = 2m\sqrt{gr}\,, \\
\dfrac{1}{2}m({v_x}^2 + v_y) + \dfrac{1}{2}3mV^2 - mgr = mgr\,, \\
v_y = 0\,, \\
v_x - V = r\dot{\theta}\,,
\end{cases}
\qquad V = \sqrt{gr}\,,\quad v_x = -\sqrt{gr}\,.
$$

2 熱力学の基本操作，熱機関

【メモ】

・全て，熱力学の基本的（むらがなく熱あり）な過程に関する問題．定石は，可動部分のつりあいから圧力の決定，状態方程式から温度の決定．内部エネルギー変化を公式，気体のする仕事を $P-V$ 図の面積評価，熱力学第 1 法則を通じて熱を計算．今回は，温度が与えられており，体積が不明なため，状態方程式は体積の決定方程式となる．

【解答】

問 1　状態方程式より，

$$T_1 = \frac{p_1 Sa}{R}\,.$$

問 2　ピストンのつりあいより，

$$0 = p_2 S - p_0 S\,, \qquad \therefore p_2 = p_0\,.$$

問 3　状態方程式より，

$$T_2 = \frac{p_0 Sa}{R}\,.$$

問 4　体積変化 0 より，気体のする仕事 W_{12} は 0．内部エネルギー変化は公式より，

$$\varDelta U_{12} = \frac{3}{2}R(T_2 - T_1) = \frac{3}{2}(p_0 - p_1)Sa\,.$$

よって，放出熱 Q^*_{12} は熱力学第 1 法則より，

$$Q^*_{12} = -Q_{12} = -(\varDelta U_{12} + W_{12}) = \frac{3}{2}(p_1 - p_0)Sa\,.$$

問 5　ピストンのつりあいより，気体の圧力は，

$$0 = pS - p_0 S\,, \qquad \therefore p = p_0\,.$$

よって，気体のする仕事 W_{23} は $p-V$ 図の面積評価（をするまでもないが）より，

$$W_{23} = p_0 \varDelta V = p_0 S(b-a)\,.$$

よって，された仕事 W^*_{23} は，

$$W^*_{23} = -W_{23} = p_0 S(a-b)\,.$$

問６　状態 3 での温度は，状態方程式より，

$$T_3 = \frac{p_0 S b}{R}\,.$$

よって，内部エネルギー変化は公式より，

$$\mathit{\Delta} U_{23} = \frac{3}{2}R(T_3 - T_2) = \frac{3}{2}p_0 S(b-a)\,.$$

以上から，放出熱 Q^*_{23} は熱力学第 1 法則より，

$$Q^*_{23} = -Q_{23} = -(\mathit{\Delta} U_{23} + W_{23}) = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{5}{2}p_0 S(a-b)}\,.$$

問７　ピストンが状態 2 から x だけ変位した状態における気体の圧力は，ピストンのつりあいより，

$$0 = pS - p_0 S - kx\,, \qquad \therefore p = p_0 + kx\,.$$

ここで，$x = a - b$ で $p = p_1$ より，

$$k = \frac{(p_1 - p_0)S}{a-b}$$

ゆえ，気体のする仕事 W_{31} は，

$$W = \int_0^{a-b}\left(p_0 S + \frac{(p_1-p_0)S}{a-b}x\right)dx = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{1}{2}(a-b)(p_1+p_0)S}\,.$$

問８　内部エネルギー変化は公式より，

$$\mathit{\Delta} U_{31} = \frac{3}{2}R(T_1 - T_3) = \frac{3}{2}(p_1 a - p_0 b)S\,.$$

よって，吸熱量 Q_{31} は，

$$Q_{31} = \mathit{\Delta} U_{31} + W_{31} = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{1}{2}\{p_1(4a-b) - p_0(4b-a)\}S}\,.$$

問９　熱効率の定義より，

$$\eta = \frac{W_{12} + W_{23} + W_{31}}{Q_{31}} = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{(a-b)(p_1-p_0)}{p_1(4a-b) - p_0(4b-a)}}\,.$$

3 電気回路

【メモ】

・電気回路は，以下の 3 つで一意に決まる．

$$\begin{cases} \text{キルヒホッフ則} \\ \text{電荷保存則} \\ \text{素子の性質} \end{cases}$$

・問 1 前半（イまで），問 2，問 3，問 7 は全て回路の状態決定に関する問題（問 6 もここに含めてもいい）．問 4 は，この設定では知識問題，問 5 は誘導に従うのみ．

・問 1 のウ，エ，オは回路のエネルギーに関する問題．ジュール熱の計算は次のように整理する．

$$J = \begin{cases} RI^2 \times (\text{経過時間}) & (I \text{ 一定のとき}), \\ \text{エネルギー収支から逆算} & (I \text{ 一定でないとき}). \end{cases}$$

【解答】

問 1　$\mathrm{C_1}$ の上側の帯電量を Q とする．キルヒホッフ則は，

$$E - \frac{Q}{C} - RI = 0\,.$$

始状態では $Q = 0$ より，

$$I = \underbrace{\frac{E}{R}}_{(\text{ア})}\,.$$

また，十分時間経過では素子の性質からコンデンサに流れ込む電流 0 より，

$$Q = \underbrace{CE}_{(\text{イ})}\,.$$

このとき，コンデンサに蓄えられている静電エネルギー U は公式より，

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \underbrace{\frac{1}{2}CE^2}_{(\text{ウ})}$$

であり，この間電池がした仕事 W は，

$$W = \varDelta QE = \underbrace{CE^2}_{(\text{エ})}\,.$$

よって，抵抗で生じたジュール熱はエネルギー収支より，

$$\varDelta U + J = W\,, \qquad \therefore J = \underbrace{\frac{1}{2}CE^2}_{(\text{オ})}\,.$$

問２　C_1 の下側の帯電量を q_1，C_2 の上側の帯電量を q_2 とする．キルヒホッフ則，および電荷保存則より，

$$\begin{cases} 0 = E - \dfrac{q_1}{C} - RI - \dfrac{q_2}{2C}\,, \\ -q_1 + q_2 = CE\,. \end{cases}$$

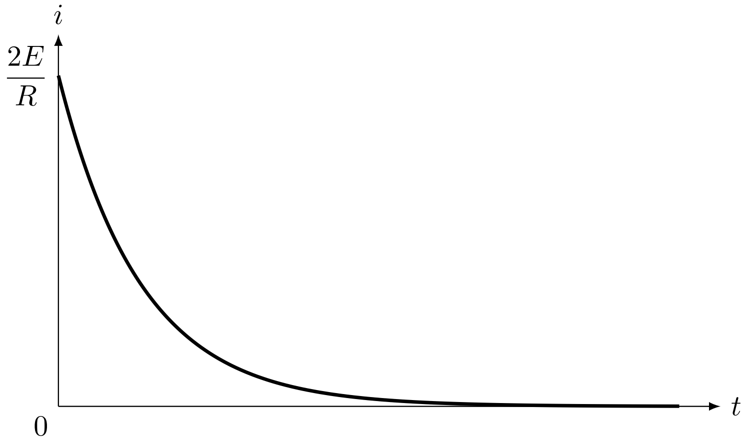
始状態では $-q_1 = CE$ より $q_2 = 0$ ゆえ，

$$E - \frac{(-CE)}{C} - RI_0 - \frac{0}{2C} = 0\,, \qquad \therefore I_0 = \frac{2E}{R}\,.$$

問３　十分時間経過では $I = 0$ より，

$$\begin{cases} 0 = E - \dfrac{q_1}{C} - 0 - \dfrac{q_2}{2C}\,, \\ -q_1 + q_2 = CE\,, \end{cases} \qquad -q_1 = -\frac{1}{3}CE\,,\ \ q_2 = \frac{4}{3}CE\,.$$

問４　$t = 0$ で $I = \dfrac{2E}{R}$，十分時間経過で $I = 0$ より，次のようなグラフになる[*1]．



問５　$t = 0$ で $i = \dfrac{2E}{R}\,(= i_0)$ より，傾きを計算して，

$$i = i_0 + \frac{0 - i_0}{t_1 - 0}t = \frac{2E}{R}\left(1 - \frac{t}{t_1}\right).$$

問６　電流の定義より，

$$\begin{aligned} \frac{dq_2}{dt} &= i = \frac{2E}{R}\left(1 - \frac{t}{t_1}\right) \\ q_2 - 0 &= \int_0^t \frac{2E}{R}\left(1 - \frac{t}{t_1}\right) dt \\ \therefore q_2 &= \frac{2E}{R}\left(t - \frac{t^2}{2t_1}\right). \end{aligned}$$

[*1] 単調減少であることを示す必要があるが，ここは暗記している前提の問題．暗記しないで自力で求めるには，【補足】に示したように，キルヒホッフ則を微分方程式として解く必要がある．

問 7　キルヒホッフ則，および電荷保存則より，

$$\begin{cases} 0 = E(t) - \dfrac{q_1}{C} - Ri - \dfrac{q_2}{2C}\,, \\ -q_1 + q_2 = CE\,, \end{cases} \qquad \begin{aligned} E(t) &= \frac{q_2 - CE}{C} + Ri + \frac{q_2}{2C} \\ &= E\left\{-\frac{3}{2t_1 RC}t^2 + \left(\frac{3}{RC} - \frac{2}{t_1}\right)t + 1\right\}. \end{aligned}$$

【補足】$\boldsymbol{i - t}$ グラフ

キルヒホッフ則，および電荷保存則より，

$$\begin{cases} 0 = E - \dfrac{q_1}{C} - RI - \dfrac{q_2}{2C}\,, \\ -q_1 + q_2 = CE\,. \end{cases}$$

ここで，電荷保存則より，電流の定義を考えれば，

$$I = \frac{dq_2}{dt} = \frac{dq_1}{dt}\,.$$

よって，キルヒホッフ則は，

$$\begin{aligned} 0 &= E - \frac{q_2 - CE}{C} - RI - \frac{q_2}{2C} \\ \therefore \frac{dq_2}{dt} &= -\frac{3}{2RC}\left(q_2 - \frac{4}{3}CE\right)\,. \end{aligned}$$

この微分方程式を解いて，

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{q_2 - \frac{4}{3}CE}\frac{dq_2}{dt}\,dt &= -\frac{3}{2RC}\int dt \\ \log\left|q_2 - \frac{4}{3}CE\right| &= -\frac{3}{2RC}t + A \\ \therefore q_2 &= \frac{4}{3}CE + e^A e^{-\frac{3}{2RC}t}\,. \end{aligned}$$

ここで，$t = 0$ で $q_2 = 0$ より，

$$0 = \frac{4}{3}CE + e^A\,, \qquad \therefore e^A = -\frac{4}{3}CE\,.$$

以上より，

$$\begin{aligned} q_2 &= \frac{4}{3}CE\left(1 - e^{-\frac{3}{2RC}t}\right)\,, \\ q_1 &= q_2 - CE = \frac{1}{3}CE\left(1 - 4e^{-\frac{3}{2RC}t}\right)\,, \\ i &= \frac{dq_2}{dt} = \frac{2E}{R}e^{-\frac{3}{2RC}t}\,. \end{aligned}$$

q_1，q_2 を図示すると以下のグラフのようになる．