27 運動方程式が解ける複数物体系

【メモ】

・最後の大問の解説．問題は動く座標系から観測する誘導となっていたが，ここでは誘導を無視して，地面固定系から考え，運動方程式と束縛条件によって現象を論じる．

・複数物体系なので基本は保存則の連立だが，束縛条件が単純なため[*1]運動方程式が解ける．このような場合，本問のように運動方程式を解かせる誘導が付く場合がある．

【解説】

x 軸を水平右向きに，y 軸を鉛直上向きに定める．A, B, C の加速度をそれぞれ $\vec{a}=(a,0)$, $\vec{b}=(b_x,b_y)$, $\vec{c}=(c_x,c_y)$ とする[*2]．A（D も含める）が B から受ける垂直抗力の大きさを N，A が C から受ける垂直抗力を左向きに R，張力の大きさを T とすると，各物体の運動方程式はそれぞれ[*3][*4]，

$$\begin{cases} Ma = N\sin\theta - T\cos\theta - R\,, \\ mb_x = -N\sin\theta + T\cos\theta\,, \\ mb_y = N\cos\theta + T\sin\theta - mg\,, \\ mc_x = R\,. \end{cases}$$

A，B，C の位置をそれぞれ $\vec{r}_\mathrm{A}=(x_\mathrm{A},y_\mathrm{A})$，$\vec{r}_\mathrm{B}=(x_\mathrm{B},y_\mathrm{B})$，$\vec{r}_\mathrm{C}=(x_\mathrm{C},y_\mathrm{C})$ とする[*5]．y_A，θ は一定値を取ることに注意して，束縛条件の時刻 t の 2 階微分を考えれば，

$$\begin{cases} \text{面}：x_\mathrm{A} = x_\mathrm{C} + \mathrm{const}\,, \\ \text{面}：y_\mathrm{A} - y_\mathrm{B} = (x_\mathrm{A} - x_\mathrm{B})\tan\theta\,, \\ \text{糸}：(y_\mathrm{A} - y_\mathrm{C}) + \dfrac{x_\mathrm{A} - x_\mathrm{B}}{\cos\theta} = \mathrm{const}\,. \end{cases} \qquad \therefore \begin{cases} a = c_x\,, \\ b_y = (b_x - a)\tan\theta\,, \\ c_y = \dfrac{a - b_x}{\cos\theta}\,. \end{cases}$$

以降，$c=c_y$ とし，以下の連立方程式を解くことを考える．

$$\begin{cases} Ma = N\sin\theta - T\cos\theta - R\,, \\ mb_x = -N\sin\theta + T\cos\theta\,, \\ mb_y = N\cos\theta + T\sin\theta - mg\,, \\ mc_x = R\,, \\ a = c_x\,, \\ b_y = (b_x - a)\tan\theta\,, \\ c\cos\theta = a - b_x\,. \end{cases}$$

[*1] 計算が面倒かどうかではなく，「束縛条件が加速度だけの 1 次の関係式になる」という意味で単純といっている．

[*2] 後に $c=c_y$ と書き直す．

[*3] A の運動方程式の y 成分は，A が床から受ける垂直抗力を決定するためだけの式のため，今は考えない．

[*4] ここで，R は水平左向きに定めたが，後の計算で水平右向きにはたらく（すなわち A が C を押すのではなく，C が A を引く）ことがわかる．これは，イメージからわかるのではなく，計算からわかることである．以降の計算からもわかるように，事前に向きを逆に定めていた場合，結果が負で求まるだけなので，最初の段階で向きがよくわからない場合もそこまで慎重になる必要はない（実は静止摩擦力もそうだが，そこまで複雑でない場合の静止摩擦力は向きを判断できるようにしたい）．

[*5] A の位置は，滑車の位置で考える

まず，A，C の運動方程式の x 成分，および AC の接触面の束縛条件 $a=c_x$ より，

$$\frac{R}{m}=\frac{N}{M}\sin\theta-\frac{T}{N}\cos\theta-\frac{R}{M}\,,\qquad \therefore R=\frac{m}{M+m}(N\sin\theta-T\cos\theta)\,,$$
$$\therefore a=\frac{1}{M+m}(N\sin\theta-T\cos\theta)\,.$$

続いて，A，および B の運動方程式の x 成分より，

$$\begin{aligned}b_x-a&=\frac{T}{m}\cos\theta-\frac{N}{m}\sin\theta-\frac{1}{M+m}(N\sin\theta-T\cos\theta)\\&=\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M+m}\right)(T\cos\theta-N\sin\theta)\,.\end{aligned}$$

さて，B の運動方程式の y 成分，および AB の接触面の束縛条件より，

$$\frac{N}{m}\cos\theta+\frac{T}{m}\sin\theta-g=\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M+m}\right)(T\cos\theta-N\sin\theta)\tan\theta$$
$$\therefore N=\frac{T\sin\theta+(M+m)g}{(M+m)+m\sin^2\theta}m\cos\theta\,.$$

また，C の運動方程式の y 成分，および糸の束縛条件より，

$$\left(\frac{T}{m}-g\right)\cos\theta=\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M+m}\right)\left\{T\cos\theta-\frac{T\sin\theta+(M+m)g}{(M+m)+m\sin^2\theta}m\sin\theta\cos\theta\right\}$$
$$\frac{2M+2m+m\sin^2\theta}{(M+m)+m\sin^2\theta}T=\frac{(M+m)+(M+2m)\sin\theta+m\sin^2\theta}{(M+m)+m\sin^2\theta}$$
$$\therefore T=\frac{(M+2m)(1+\sin\theta)-m\cos^2\theta}{2(M+2m)-m\cos^2\theta}mg$$

よって，

$$c=\frac{(M+2m)(1+\sin\theta)-m\cos^2\theta}{2(M+2m)-m\cos^2\theta}g-g=-\frac{(M+2m)(1+\sin\theta)-m\cos^2\theta}{2(M+2m)-m\cos^2\theta}$$

また，

$$\begin{aligned}T\sin\theta+(M+m)g&=\frac{(M+2m)(1+\sin\theta)-m\cos^2\theta}{2(M+2m)-m\cos^2\theta}mg\sin\theta+(M+m)g\\&=\frac{g}{2(M+2m)-m\cos^2\theta}\big[(M+2m)(1+\sin\theta)m\sin\theta-m^2\cos^2\theta\sin\theta\\&\qquad+(M+m)\{2(M+2m)-m\cos^2\theta\}\big]\\&=\frac{(M+2m-m\cos^2\theta)(2M+3m+m\sin\theta)}{2(M+2m)-m\cos^2\theta}g\end{aligned}$$

より，

$$N=\frac{\{2(M+2m)-m(1-\sin\theta)\}\cos\theta}{2(M+2m)-m\cos^2\theta}mg$$

以上より，

$$
\begin{aligned}
T\cos\theta - N\sin\theta &= \frac{mg}{2(M+2m)-m\cos^2\theta}\Big[\{(M+2m)(1+\sin\theta)-m\cos^2\theta\}\cos\theta \\
&\qquad\qquad -\{2(M+2m)-m(1-\sin\theta)\}\sin\theta\cos\theta\Big] \\
&= \frac{(M+m)(1-\sin\theta)\cos\theta}{2(M+2m)-m\cos^2\theta}mg
\end{aligned}
$$

ゆえ，R の大きさを $|R|$ として，

$$
\begin{aligned}
b_x &= \underline{\frac{(M+m)(1-\sin\theta)\cos\theta}{2(M+2m)-m\cos^2\theta}g}\,, \\
a &= \underline{-\frac{m(1-\sin\theta)\cos\theta}{2(M+2m)-m\cos^2\theta}g}\,, \\
|R| &= \underline{\frac{m(1-\sin\theta)\cos\theta}{2(M+2m)-m\cos^2\theta}mg}\,, \\
b_y &= (b_x-a)\tan\theta = \underline{\frac{(M+2m)(1-\sin\theta)\sin\theta}{2(M+2m)-m\cos^2\theta}g}\,.
\end{aligned}
$$

【補足】運動量の x 成分に関する話

各物体の運動方程式の x 方向成分の和を取ると[*6]，

$$
\begin{aligned}
M\ddot{x}_{\mathrm{A}} + m\ddot{x}_{\mathrm{B}} + m\ddot{x}_{\mathrm{C}} &= 0 \\
\frac{d}{dt}\left(M\dot{x}_{\mathrm{A}} + m\dot{x}_{\mathrm{B}} + m\dot{x}_{\mathrm{C}}\right) &= 0 \\
\therefore M\dot{x}_{\mathrm{A}} + m\dot{x}_{\mathrm{B}} + m\dot{x}_{\mathrm{C}} &= \mathrm{const}
\end{aligned}
$$

を得る（運動量の x 成分の保存則）．また，初期条件 $\dot{x}_{\mathrm{A}}(0)=\dot{x}_{\mathrm{B}}(0)=\dot{x}_{\mathrm{C}}(0)=0$ を用いてこの式の両辺をさらに時刻 t で積分すれば，

$$
\begin{aligned}
&M\dot{x}_{\mathrm{A}} + m\dot{x}_{\mathrm{B}} + m\dot{x}_{\mathrm{C}} = 0 \\
&Mx_{\mathrm{A}} + mx_{\mathrm{B}} + mx_{\mathrm{C}} = \mathrm{const} \\
&\qquad\qquad \therefore x_{\mathrm{CM}} = \frac{Mx_{\mathrm{A}} + mx_{\mathrm{B}} + mx_{\mathrm{C}}}{M+m+m} = \mathrm{const} \\
&\qquad\qquad\qquad\quad = \frac{Mx_{\mathrm{A}}(0) + mx_{\mathrm{B}}(0) + mx_{\mathrm{C}}(0)}{M+m+m}
\end{aligned}
$$

と重心不変を得る[*7]．

[*6] $\ddot{x}_{\mathrm{A}} = \dfrac{d^2x_{\mathrm{A}}}{dt^2} = a$ とする．b_x，c_x についても同様．

[*7] 始め全ての物体が静止しているとき，その系の運動量が保存する方向成分の重心が不変となる事実は物理としてはそこまで重要なことではないが，「入試物理」ではちょこちょこ使うことがあるため常識としておくとよい．